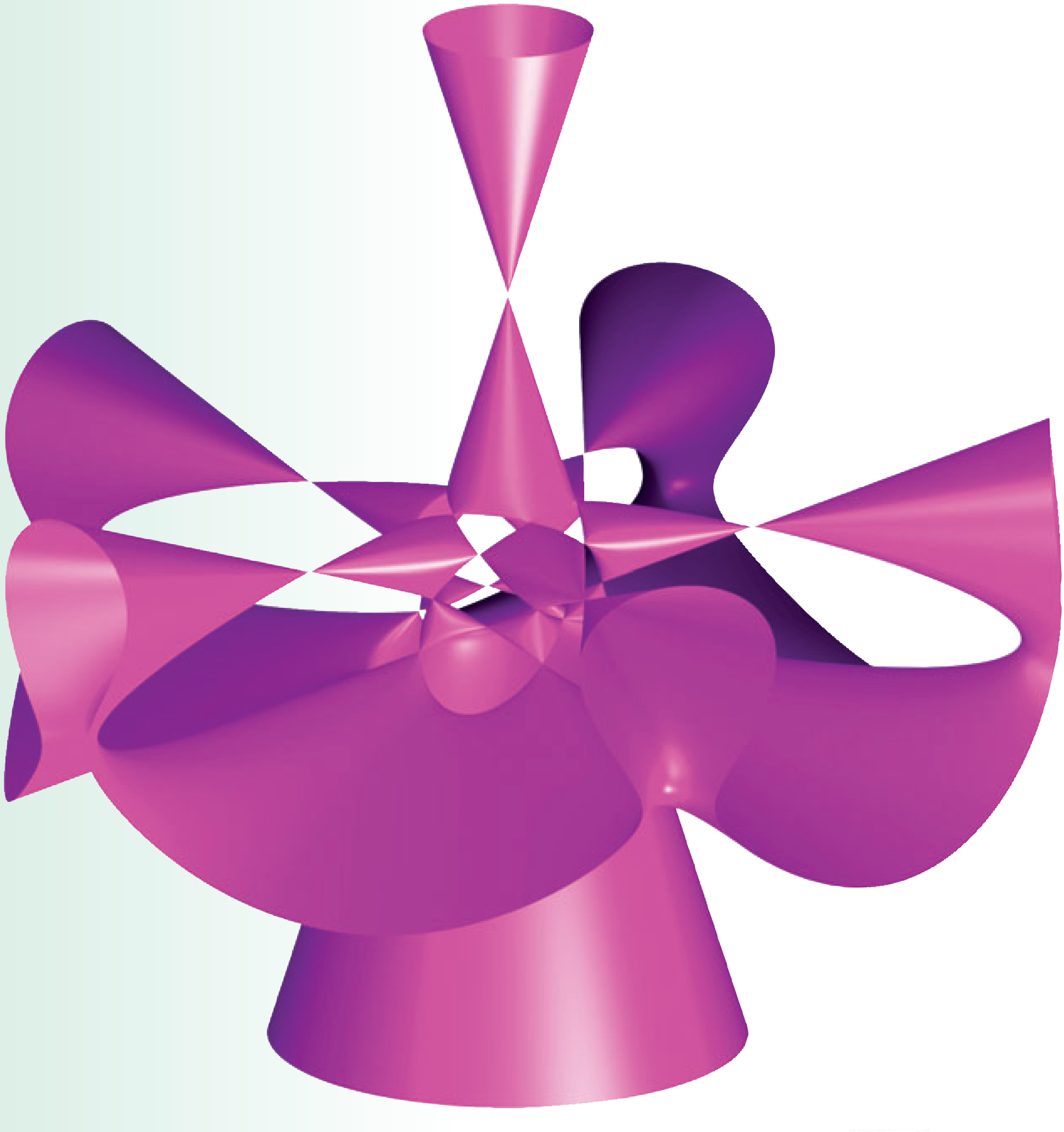
www.uni-bayreuth.de 1/08

spektrum

JAHR DER MATHEMATIK



UNIVERSITÄT BAYREUTH

Editorial

Präsident der Universität Bayreuth Prof. Dr. Dr. h.c. Helmut Ruppert

Nahtlos gehen wir vom Jahr der Geisteswissenschaften in das Jahr der Mathematik. Beide Disziplinen haben eine große Tradition. Sie begleiten die Kultur der menschlichen Gesellschaften von Anfang an. Geisteswissenschaften beschäftigen sich mit der Entwicklung von Wertvorstellungen, Normen und Handlungen der Menschen. Sie diskutieren die Äußerungen von Kulturen und die kulturelle Entwicklung. Mathematik beschäftigt sich mit Zahlen, mit der Darstellung von funktionalen Beziehungen durch Ziffern und geometrische Darstellungen. Beides sind Wissenschaften, die die hohe Kreativität der Menschheit abbilden.

Das Jahr der Mathematik verweist uns auf die grundlegende Bedeutung dieser Disziplin in vielen unseren Lebensbereichen. Mathematik ist die Basis vieler Wissenschaften. Mathematik ist heute in vielen Anwendungsbereichen gefordert. Mathematik wird auch auf dem heutigen Arbeitsmarkt stark nachgefragt.

Da mutet es seltsam an, dass sich noch relativ wenig Studenten für das Fach Mathematik begeistern. Liegt das an der Art des Mathematikunterrichts in den Schulen, wo man oft viel zu theoretisch an mathematische Grundprobleme herangeht? Oder liegt es daran, dass es besonders „schick“ ist, wenn man mit seiner mathematischen Nichtkompetenz kokettiert? Selbst unsere Vertreter der Politik und der Kultur unterliegen manchmal dieser fatalen Einstellung.

Die Begeisterung für die Mathematik und die spannende Erarbeitung mathematischer Fragestellungen an konkreten praktischen Beispielen – auch aus dem täglichen Umfeld des Einzelnen – sollte, ja muss, heute insbesondere in den Schulen gefördert werden. Die Universität Bayreuth trägt hier über viele neue Lernumgebungen, besonders über dynamische Arbeitsblätter oder die Mathematiksoftware GEONExT zum Lehren und Lernen von Mathematik bei. Der Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik der Universität Bayreuth leitet auch den Bereich Mathematik in den bundesweiten BLK-Modellvorhaben „SINUS“ und „SINUS-TRANSFER“. Über Lehrerfortbildung, aber auch durch direkten Kontakt in die Schulklasse hinein, wird hier „spannende Mathematik“ vermittelt.

Bereits vor fünf Jahren hat die Universität Bayreuth ein Zentrum zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts (Z-MNU) eingerichtet, das hervorragende Arbeit leistet. Wir sind sicher, dass in den nächsten Jahren Erfolge erreicht werden. Es ist dringend notwendig, dass wir jungen Nachwuchs für den Arbeitsmarkt im Bereich der Mathematik aber auch in den ingenieur- und naturwissenschaftlichen Fächern ausbilden, die ja ebenfalls die Mathematik als Vermittlungsbasis haben.

Titelbild

__Titelseite:__ Die Abbildung zeigt eine sogenannte Togliatti Quintik. Diese schöne Fläche besitzt 31 „Singularitäten“ (Spitzen) und ist durch eine polynomiale Gleichung vom Grad 5 beschrieben, die Wolf Barth 1991 errechnet hat. Diese Klasse von Flächen war von Eugenio Togliatti 1940 entdeckt worden. Die Fläche im Bild wurde mit dem Programm surfex von Oliver Labs visualisiert. (Für Hintergrundinformationen siehe O. Labs' Dissertation auf www.OliverLabs.net).

Impressum

Redaktion:
Pressestelle der Universität Bayeuth
Jürgen Abel, M.A. (ViSdP)
Anschrift: 95440 Bayreuth
Telefon (09 21) 55-53 23/4
Telefax (09 21) 55-53 25
pressestelle@uni-bayreuth.de
http://www.uni-bayreuth.de

Herausgeber:
Der Präsident der Universität Bayreuth

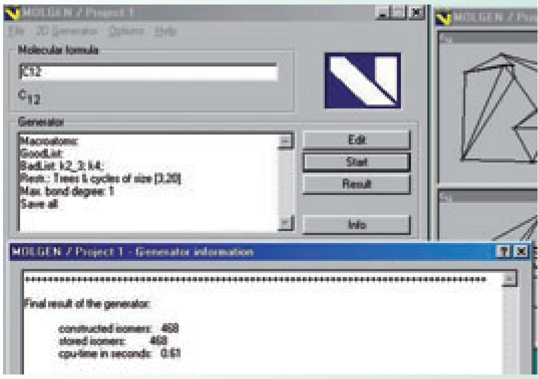
Satz und Layout:
GAUBE media agentur, Bayreuth
Telefon (09 21) 5 07 14 41
spektrum@gaube-media.de

Auflage: 4500 / dreimal jährlich
Druck: Holtz Druck, Neudrossenfeld
Telefon (0 92 03) 60-0

Kürzungen und Bearbeitung eingesandter Manuskripte behält sich die Redaktion vor. Alle Beiträge sind bei Quellenangaben frei zur Veröffentlichung. Belegexemplare sind erwünscht.

Inhalt

Das Jahr der Mathematik



Rückblick

Lars Grüne

Das Jahr

Seit 2000 veranstaltet das Bundesministerium für Bildung und Forschung zusammen mit der Initiative Wissenschaft im Dialog die Wissenschaftsjahre. Ziel ist es, den Austausch zwischen Wissenschaft und Öffentlichkeit zu fördern, und dabei vor allem das Interesse der Öffentlichkeit an wissenschaftlichen Themen zu stärken. Nach dem gerade beendeten Jahr der Geisteswissenschaften ist 2008 nun das „Jahr der Mathematik". Unterstützt werden die Veranstalter dieses Jahr insbesondere von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und der Deutschen Telekom Stiftung sowie vielen weiteren Organisationen. Eröffnet wird das Jahr der Mathematik mit einer großen Auftaktveranstaltung am 23. Januar in Berlin. Diese gibt den Startschuss für vielfältige Veranstaltungen in ganz Deutschland, die sich alle um das Thema „Mathematik" und seine verschiedensten Aspekte drehen. Informationen über alle Veranstaltungen zum Jahr der Mathematik werden zeitgleich mit dieser Veranstaltung (leider erst nach Redaktionsschluss dieser Spektrum-Ausgabe) auf der Webseite www.jahr-der-mathematik.de im Internet veröffentlicht. Ein paar Highlights unter den vielen Veranstaltungen können wir Ihnen hier trotzdem schon vorstellen:

Zahlen, bitte! Die wunderbare Welt von null bis unendlich

1. Februar bis 18. Mai 2008, Paderborn

Das Heinz Nixdorf MuseumsForum (HNF) zeigt die große Sonderausstellung „Zahlen, bitte! Die wunderbare Welt von null bis unendlich". Auf 700 Quadratmetern erleben die Besucher eine spannende und unterhaltsame Reise durch die Welt der Zahlen mit Einblicken in das Glücksspiel, der Frage, ob Tiere rechnen können, und Erklärungen, wie in früheren Zeiten und bei anderen Völkern gerechnet wurde. Für Schulklassen aller Altersstufen und alle, die sich für Zahlen interessieren: *www.hnf.de*

MS Wissenschaft 2008 – das Matheschiff

Ende April bis Ende August, deutschlandweit

Im Jahr der Mathematik ist das Ausstellungsschiff von Wissenschaft im Dialog wieder auf den deutschen Flüssen unterwegs. Von Ende April bis Ende August besucht es über 30 Städte und lädt ein zum Ausprobieren, Mitmachen und Mitforschen. Auf über 600 qm erfährt man hier, warum die U-Bahn eben nicht fünf Minuten früher fahren kann oder was Riesenwellen oder ein frischer Erdbeerjoghurt mit Mathematik zu tun haben. Alle Stationen finden Sie ab Februar auf: *www.ms-wissenschaft.de*

Wissenschaftssommer 2008

28. Juni bis 4. Juli 2008, Leipzig

Beim Wissenschaftssommer 2008 der Initiative Wissenschaft im Dialog, vom 28. Juni bis 4. Juli 2008 in Leipzig dreht sich dieses Jahr ebenfalls alles um Mathematik: vom Puppentheater für Kinder über ein Filmfest und den Jahrmarkt der Wissenschaften bis zur Kopfrechenweltmeisterschaft 2008: *www.wissenschaftssommer2008.de*

Aber nicht nur bei diesen Veranstaltungen in ganz Deutschland können Sie sich über die Faszination der Mathematik informieren – auch vor Ort an der Universität Bayreuth. Eine hervorragende Möglichkeit dazu ist der **Tag der Mathematik**, der am 12.7.2008 – eine Woche nach dem Bayreuther Bürgerfest – nun bereits zum dritten Mal statt findet. Dort können Sie sich in Vorträgen über die verschiedenen Seiten der Mathematik informieren und in Labors selbst mit mathematischer Software experimentieren. Schülerinnen und Schüler der Klassen 5-13 haben zudem wieder die Möglichkeit, Ihre Fähigkeiten in einem großen Mathematikwettbewerb zu testen.
Weitere Infos finden Sie im Internet unter www.tdm.uni-bayreuth.de.

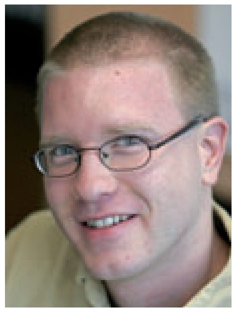
der Mathematik

Prof. Dr. Lars Grüne

Eine weitere Möglichkeit wollen wir Ihnen mit dieser Ausgabe des Spektrum bieten. In diesem Heft haben wir die Darstellung unseres Mathematischen Instituts, der einzelnen Lehrstühle und ihrer Forschungsprojekte (die Sie im Internet auf unseren Webseiten www.math.uni-bayreuth.de sowieso viel aktueller finden) bewusst knapp gehalten. Statt dessen haben wir den Versuch gewagt, ganz im Stile eines Wissenschaftsmagazins Beiträge über aktuelle und historische Themen ebenso wie Unterhaltsames und Philosophisches aus der Welt der Mathematik für Sie zusammenzustellen und – wir wir hoffen – so aufzubereiten, dass Sie auch ohne vorhergehendes Mathematik-Studium einen Einblick in die vielen verschiedenen Aspekte der Mathematik bekommen. Viel Spaß beim Lesen! ■

Sascha Kurz

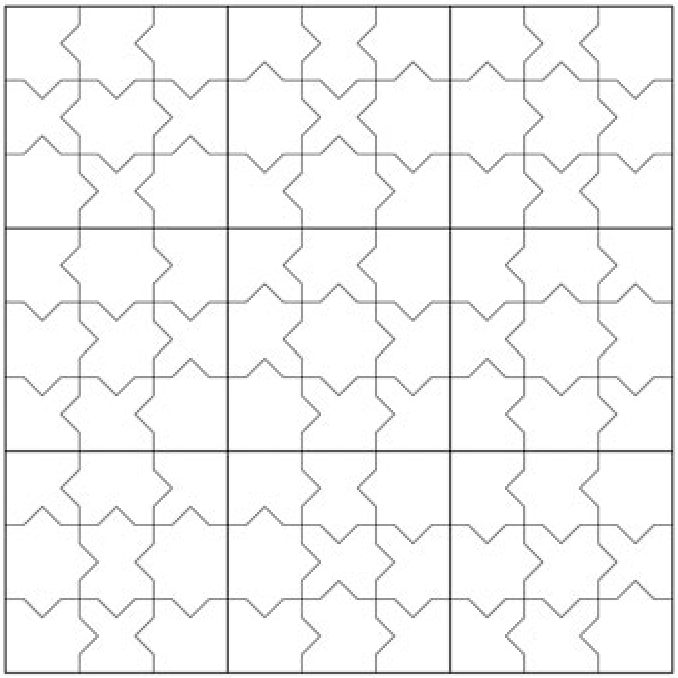
Die rätselhafte Seite der Mathematik



Dr. Sascha Kurz

Das japanische Logikrätsel Sudoku (kurz für Sūji wa dokushin ni kagiru, wörtlich „Eine Zahl bleibt immer allein“) erfreut sich mittlerweile großer Beliebheit. Ziel ist es, ein 9 x 9-Quadrat mit den Zahlen von 1 bis 9 so auszufüllen, dass jede Ziffer in einer Zeile, in einer Spalte und in einem Block (durch dicke Linien abgegrenztes 3 x 3-Unterquadrat) nur einmal vorkommt.

Bei nebenstehender Variante sind keinerlei Zahlen vorgegeben, dafür sind zwischen manchen Feldern Kleiner- bzw. Größerzeichen graphisch symbolisiert. Frei nach der Eselsbrücke „Das Krokodil schnappt immer nach dem größeren Brokken“ liefert uns dies Informationen darüber, wo die größeren und wo die kleineren Ziffern stehen.[1] Diese Sudoku-Variante ist übrigens auch unter dem Namen „Comparison Sudoku“[2] bekannt. Nun wünschen wir viel Spaß beim Rätseln! ■



Noch mehr derartige Sudoku-Rätsel können Sie unter *www.wm.uni-bayreuth.de/index.php?id=sudoku* herunterladen.

[1] *Als Mathematikstudent hätte Ihnen so ein Rätsel im Sommersemester 2006 als Übungsaufgabe zur Vorlesung „Ganzzahlige Optimierung“ begegnen können. Hier ging es darum, das Rätsel mit Hilfe sogenannter ganzzahliger linearer Programme mathematisch zu modellieren und mittels mathematischer Standardsoftware zu lösen.*

[2] *http://de.wikipedia.org/wiki/Sudoku*

Von Eudoxos bis zur

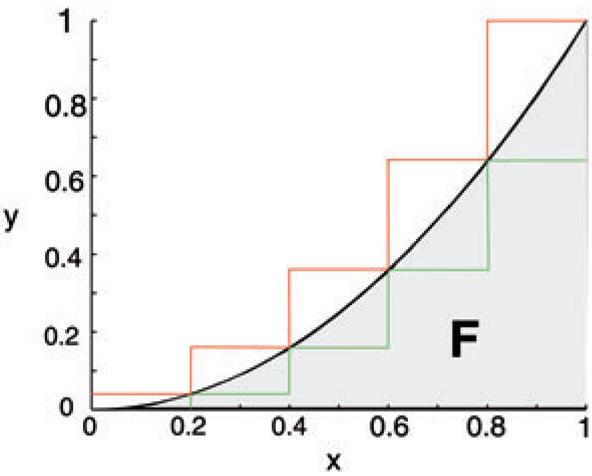
Exhaustion, Finite Elemente

Dr. Robert Baier und Prof. Dr. Frank Lempio

Motivation, Mathematik zu treiben, kann die **Schönheit** einer mathematischen Idee sein. Motivation, Mathematik zu treiben, kann aber auch die **Nützlichkeit** einer mathematischen Methode sein. Idealerweise gelingt Motivation über beides. Stellt man zusätzlich noch den **historischen Bezug** her, so zeigt sich, dass Mathematik ein sich folgerichtig entwickelndes Beziehungsgeflecht von Ideen und Methoden ist, das schön **und** nützlich ist.

Dies soll für das aktuelle Forschungsgebiet der **mengenwertigen Numerik** näher ausgeführt werden, und zwar so, dass die Grundprinzipien auch für den Nichtspezialisten verständlich werden. Wir beschränken uns dabei auf die Darstellung und Approximation von Mengen mittels so genannter **Finiter Elemente**, die Erweiterung der Vektorrechnung auf das **Rechnen mit Mengen** und die diskrete Approximation **dynamischer Systeme**, insbesondere in der **Klimafolgenforschung**.

Abb. 1: Parabelabschnitt



Von Eudoxos bis zur Methode der Finiten Elemente

Eudoxos von Knidos (ca. 400 bis 350 v. Chr.), griechischer Mathematiker und Philosoph, war Begründer der so genannten **Exhaustionsmethode**, mit der man Kurvenlängen, Flächen und Rauminhalte berechnen konnte durch **Ausschöpfung** mittels elementarer Mengen bekannten Inhalts. Archimedes von Syracus (285 bis 212 v. Chr.), griechischer Mathematiker und Physiker, wandte diese Methode systematisch auf konkrete Probleme an. Bemerkenswert ist hierbei, dass die Resultate ohne Kenntnis der Differential- und Integralrechnung im heutigen Sinne gewonnen wurden.

Als elementares Beispiel betrachten wir die Berechnung der Fläche F zwischen der x-Achse und der Parabel $y = x^2$ über dem Intervall $[0,1]$, vergleiche Abb. 1.

Als untere und obere Approximation der Parabel wählen wir Treppenkurven, wie sie derzeit bereits in der Schule bei der Einführung des Riemann-Integrals Verwendung finden. Zerlegen wir das Intervall $[0,1]$ in N Teilintervalle gleicher Länge, so liefern die Flächen unter den Treppenkurven nach elementaren Umformungen die Einschließung

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2N} + \frac{1}{6N^2} \leq F \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2N} + \frac{1}{6N^2}$$

Nach dem **Archimedischen Axiom**, das auch schon auf Eudoxos zurückgeht, gibt es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl m mit $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Wendet man es auf die Einschließung an, so erhält man als Fläche unter dem Parabelabschnitt

$$F = \frac{1}{3}$$

In moderner Terminologie würde man die Teilintervalle des Ausgangsintervalls $[0,1]$ (eindimensionale) **Finite Elemente** nennen und die zur Approximation verwendeten Treppenkurven auch (zusammengesetzte, stückweise konstante) **Finite Element-Funktionen**. Das sind Funktionen, deren Definitionsbereich aus finiten Elementen zusammengesetzt ist und die auf jedem einzelnen Element durch endlich viele Daten beschrieben werden. Im Falle der Treppenkurven sind die zugehörigen finiten Elemente die eindimensionalen Teilintervalle auf der x-Achse. Die Treppenkurve ist vollständig festgelegt durch ihren Wert in einem Endpunkt jedes Teilintervalls.

Archimedes hat bei seinen Flächenberechnungen noch viel kompliziertere innere und äußere „Ausschöpfungen" verwendet. Auch in Abb. 1 würde eine Approximation des Parabelbogens durch stückweise lineare Finite Element-Funktionen eine viel bessere äußere Ausschöpfung liefern. Heutzutage wird diese stückweise lineare Approximation als Basis hocheffizienter Extrapolationsmethoden für die numerische Integration verwendet in Verbindung mit adaptiven Finite

Robert Baier und Frank Lempio

Klimafolgenforschung

und mengenwertige Numerik

Element-Gittergenerierungstechniken.
Höherdimensionale Finite Elemente illustrieren wir durch das folgende Anwendungsbeispiel, den **Entwurf eines Zeltdaches**. Der Grundriss der Zeltdachkonstruktion ist dargestellt in Abb. 2.

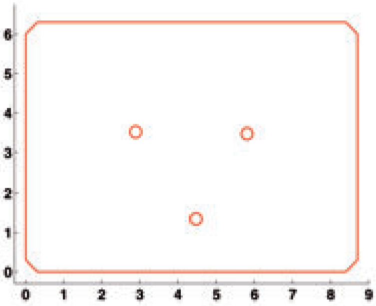


Abb. 2: Grundriss der Zeltdachkonstruktion

Zunächst ist eine Ausgangszerlegung des Grundrisses in zweidimensionale finite Elemente, eine so genannte Triangulation, zu berechnen, vergl. Abb. 3. Es handelt sich hierbei um ein adaptives Gitter, das an die Krümmung des Randes (rot in Abb. 2 und 3) angepasst ist.
Das Zeltdach wird eingespannt in vorgegebener Höhe an den vier abgeschrägten Ecken des zu überspannenden Bereichs und an drei inneren Masten verschiedener Höhe. Dies sind so genannte Randbedingungen erster Art für diesen Teil des Randes. Im übrigen Teil des Randes wird die Neigung des Daches vorgeschrieben.
Das Zeltdach selbst wird mittels stückweise linearer Finite Element-Funktionen über der blauen Triangulation des Grundrisses approximiert, dies ist ein gekrümmtes Gitternetz, das aus lauter ebenen Dreiecken besteht, vergl. Abb. 4.
Aus all diesen stückweise linearen Finite Element-Funktionen, die die Randbedingungen erfüllen, wird im Sinne der modernen Finite Element-Methode, verstanden als Variationsmethode, diejenige ausgewählt, die zusätzlich ein problemspezifisches Funktional, wie z.B. ein Wirkungsintegral, ein Energiefunktional oder ein Steifigkeitsmaß, minimiert bzw. maximiert.
Abb. 4 gibt eine bereits optimierte Konfiguration wieder, die die Lösung eines inhomogenen Dirichlet-Problems mit den vorgegebenen Randbedingungen approximiert. Wir wollen hier nicht weiter auf die mathematisch präzise Formulierung dieser Randwertaufgabe für eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung eingehen. Eine numerische Lösung, die früher den Einsatz großer Rechenanlagen erfordert hätte, kann von unseren Mathematikstudenten schon im Rahmen des Grundstudiums in den Numerikübungen mit dem PC gewonnen werden.
Die Visualisierung auf dem Computer erfordert eine dreidimensionale Darstellung. Die Einfärbung kann zur Unterstützung dieser Darstellung oder für die Darstellung von Zusatzinformationen herangezogen werden. Die Farbstufen in Abb. 4 sind z.B. ein Maß für die Höhe des Zeltdachs.
Die Grundidee der Finite Element-Methode findet sich für den eindimensionalen Fall etwas versteckt bereits in den Werken von LEONHARD EULER (1707-1783). Er entwickelte aufbauend auf Vorarbeiten von PIERRE DE FERMAT (1601-1665), JAKOB BERNOULLI (1655-1705) und JOHANN BERNOULLI (1667-1748) die

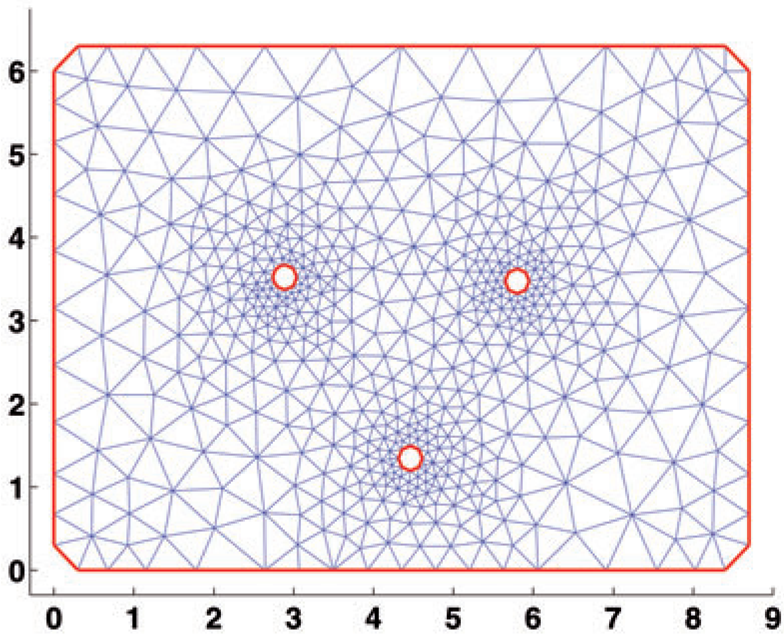


Abb. 3: Triangulation des Grundrisses

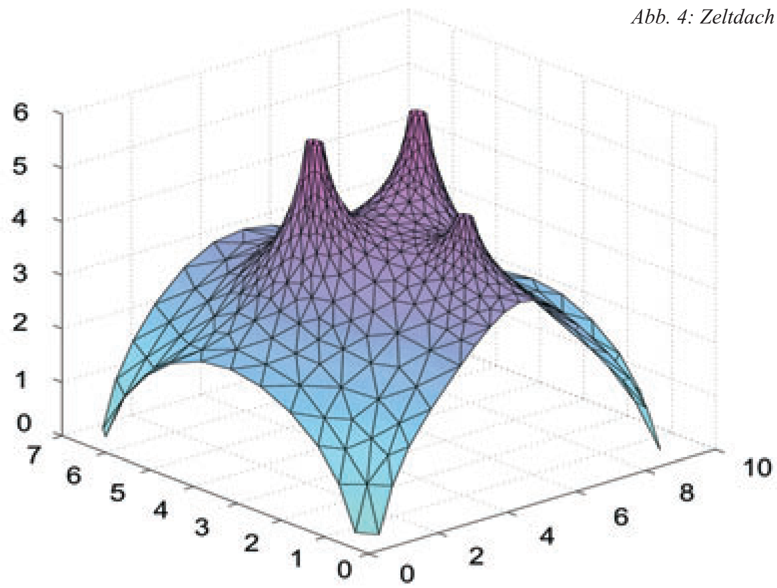
Von Eudoxos bis zur Klimafolgenforschung

Variationsrechnung und veröffentlichte 1744 das grundlegende Werk „Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes sive Solutio Problematis Isoperimetrici Latissimo Sensu Accepti (Methode zum Auffinden ebener Kurven, die gewisse Maximum- oder Minimumeigenschaften aufweisen ...)“. Darin behandelt er das so genannte **einfachste Problem der Variationsrechnung** in kontinuierlicher und diskreter Form. Euler benutzte in seiner Darstellung natürlich noch nicht den Begriff der Finite Element-Funktion, aber konzeptionell besteht seine Idee darin, das Ausgangsproblem durch eine Folge von Optimierungsproblemen auf Finite Element-Räumen zu approximieren, und dies ist gerade das Wesen der modernen Finite Element-Methode, verstanden als **Variationsmethode**. Euler verfügte auch noch nicht über Computer und Algorithmen, mit denen er die diskreten Ersatzprobleme hätte direkt lösen können. So verfolgte er den analytischen Zugang weiter und leitete durch Variation der diskreten Probleme die berühmte **Eulersche Differentialgleichung** her. Diese analytische Methode war zunächst so erfolgreich, dass der ursprüngliche Ansatz der Finite Element-Methode wieder vergessen wurde.

In Arbeiten von SCHELLBACH (1851) und COURANT (1943) wird die Finite Element-Methode konzeptionell verwendet. Auch HILBERTS Beweis des **Dirichlet-Prinzips**, wonach (in geeigneten Funktionenräumen) die Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe das Dirichlet-Integral minimiert (und umgekehrt), ist in dem hier betrachteten Zusammenhang von großer Bedeutung.

Wirklich neuentdeckt und unter Einsatz von Computern angewendet wurde die Finite Element-Methode erst nach dem zweiten Weltkrieg, zunächst von Ingenieuren, dann weiterentwickelt in Zusammenarbeit mit Mathematikern. Heute ist die Finite Element-Methode aus weiten Bereichen naturwissenschaftlich-technischer Anwendungen, wie z.B. der Baustatik, der Elastizitätstheorie, der Hydrodynamik und der Aerodynamik, nicht mehr wegzudenken.

Abb. 4: Zeltdach



Wichtig für die folgenden Abschnitte ist, dass Mengen durch ihre Finite Element-Triangulationen und Abbildungen auf diesen Mengen durch zusammengesetzte Finite Element-Funktionen approximiert und diese Approximationen auch im Computer verarbeitet werden können, da sie durch endlich viele Daten beschrieben werden.

Mengenarithmetik und mengenwertige Numerik

Für die mengenwertige Numerik, ein Teilgebiet der Mathematik, das sich mit dem Entwurf und der Analyse mengenwertiger Verfahren beschäftigt, benötigt man zunächst eine geeignete Arithmetik (Addition, Subtraktion, skalare Multiplikation von Mengen).

Die folgende Erweiterung der Vektorrechnung zum Rechnen mit Mengen berührt einerseits die Geometrie, andererseits führt sie mitten hinein in ein aktuelles Forschungsgebiet der Angewandten Mathematik. Hier soll nur das Prinzip verdeutlicht werden, nach dem Mengen **in einem algebraischen Sinne**, nicht zu verwechseln mit der BOOLEschen Mengenalgebra, voneinander subtrahiert werden können. Ausgangspunkt ist hierbei die Addition nach HERMANN MINKOWSKI (1864-1909) zweier nichtleerer Teilmengen eines n-dimensionalen Vektorraums zusammen mit der Multiplikation mit reellen Skalaren, vergl. Abb. 5:

$$\boxed{\begin{aligned} A + B &= \{\, a + b \mid a \in A,\, b \in B \,\} \\ \lambda \cdot A &= \{\, \lambda \cdot a \mid a \in A \,\} \end{aligned}}$$

Abb. 5: Mengenoperationen

Für das Einheitsquadrat A in der Ebene und die Kreisscheibe B mit Radius ½ veranschaulichen wir die **Minkowski-Summe** in Abb. 6. Sie kann als Vereinigung über alle Verschiebungen der Menge B (violett berandet) um ein beliebiges Element von A (blau berandet) interpretiert werden. In der Abbildung sind exemplarisch einige solcher verschobenen Mengen (grau berandet) eingezeichnet, dabei sind jeweils nur

die Ränder der Mengen gezeichnet worden. Die Minkowski-Summe ist dann die rot berandete Menge.
Die Addition einer Menge zu einer einpunktigen Menge ergibt also einfach die verschobene Menge. Sind beide Mengen sogar einpunktig, erhält man die übliche Vektoraddition.

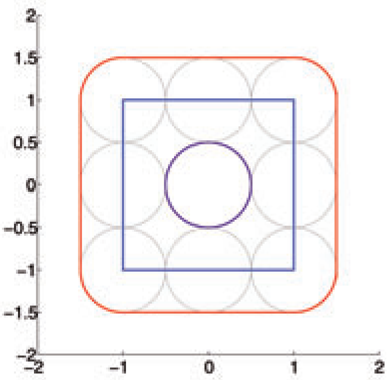


Abb. 6: Minkowski-Summe A+B

Die „naive" oder „punktweise" Differenz von A und B, nämlich

$$A + (-1) \cdot B = \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$$

hat keine besonders brauchbaren Eigenschaften, ist doch z.B. für das Einheitsquadrat $A + (-1) \cdot A = 2 \cdot A$ und nicht, wie es wünschenswert wäre, der Nullvektor.
Will man also die Minkowski-Addition durch eine Subtraktion ergänzen, so dass die bekannten Rechenregeln für reelle Vektoren erhalten bleiben, so braucht man neue Ideen.
Wir schildern für den interessierten Leser die so genannte **gerichtete Differenz** am Beispiel zweier ebener, abgeschlossener, beschränkter und konvexer Mengen etwas detaillierter, bevor wir zu den Grundideen der Mengenarithmetik zurückkehren. Eine Menge heißt dabei konvex, wenn die Verbindungslinie zweier beliebiger Punkte der Menge selbst ganz in der Menge liegt.
Wiederum sei der Minuend A das Einheitsquadrat, der Subtrahend B die Kreisscheibe mit Radius ½, vergl. Abb. 7. Dort sind für den vertikalen äußeren Normalenvektor l_1 (rot) bzw. eine weitere Normale l_2 (grün) die entsprechenden Paare paralleler Stützgeraden an A und B und die zugehörigen Stützpunktmengen A_{l_1}, B_{l_1} (rot) bzw. A_{l_2}, B_{l_2} (grün) eingezeichnet. Da B_{l_1} einpunktig ist, lässt sich die Differenz $A_{l_1} - B_{l_1}$ „im üblichen Sinne" als Verschiebung von A_{l_1} bilden und liefert die mit der Normale l_1 markierte Teilstrecke des blauen Streckenzugs in Abb. 8. Die Stützpunktmengen A_{l_2} und B_{l_2} sind sogar beide einpunktig, und die Differenz $A_{l_2} - B_{l_2}$ kann als gewöhnliche Vektordifferenz berechnet werden. Sie liefert den mit der Normale l_2 markierten Punkt des blauen Streckenzugs in Abb. 8.
Führt man diese Konstruktion für **alle** Normalen durch, so erhält man als Differenz $A - B$ den durch diese Normalen markierten Streckenzug (blau) in Abb. 8. Dies ist die so genannte gerichtete Differenz von A und B. Dabei wurde eine Menge mit lauter **äußeren Normalen** hellblau hervorgehoben, die als konvexer Anteil der gerichteten Menge aufgefasst werden kann.

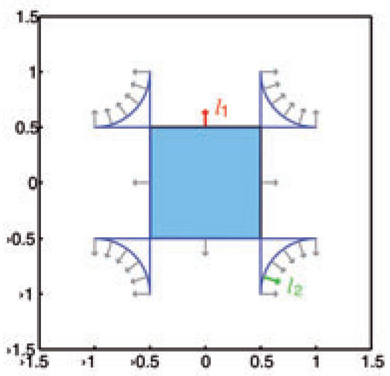


Abb. 8: gerichtete Differenz $A - B$

Die Grundidee dieser Konstruktion besteht also darin, die Differenz konvexer Mengen auf die Differenz von Stützpunktmengen zurückzuführen und damit auf (konvexe) Mengen niedrigerer Dimension. Nach endlich vielen Reduktionsschritten (im Beispiel war nur ein Schritt erforderlich) landet man bei bekannten Differenzen (Translationen oder gewöhnlichen Differenzen).

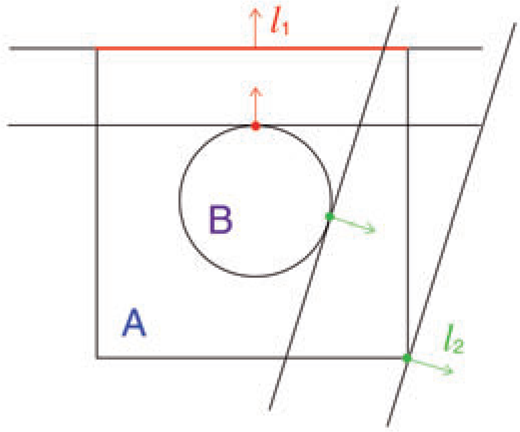


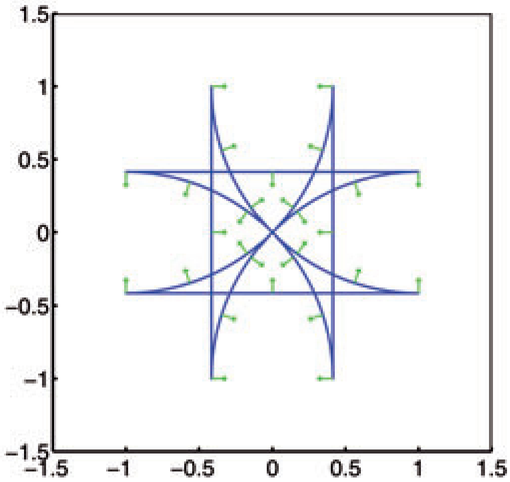
Abb. 7: Stützpunktmengen von A und B

Man kann zeigen, dass die Menge aller nichtleeren, abgeschlossenen, beschränkten und konvexen Teilmengen eines n-dimensionalen reellen Vektorraumes durch rekursive Anwendung dieses Reduktionsprinzips erweitert wird zum reellen Vektorraum der so genannten **gerichteten Mengen**. Diese gerichteten Mengen können auch algorithmisch visualisiert werden, für Einzelheiten vergleiche man Baier und Farkhi (2001). Sie erweitern daher den bereits Mitte des 20. Jahrhunderts entwickelten algebraischen Einbettungszugang von Hans Rådström und Lars Hörmander.
Der hier angedeutete Erweiterungsprozess der Mengen zu gerichteten Mengen, mit denen man ähnlich wie mit gewöhnlichen Vektoren rechnen kann, ist zusammen mit der klassischen Booleschen Mengenalgebra grundlegend für die mengenwertige Numerik.
Wir können hier nicht auf weitere mathematische Einzelheiten eingehen, sondern visualisieren die oben beschriebene gerichtete Differenz von Mengen für einige instruktive Beispiele. In den Abb. 9 und 10 sieht man, wie sich die Differenz ändert, wenn man beim Subtrahenden den Radius der Kreisscheibe auf $\sqrt{2}$ bzw. 2 erhöht. Dabei ist für die erste Differenz der konvexe Anteil zum Nullpunkt zusammengeschrumpft. In der zweiten Differenz ist eine Menge mit lauter **inneren**

Von Eudoxos bis zur Klimafolgenforschung

Normalen rosa eingefärbt, die interessanterweise als „konkaver" Anteil interpretiert werden kann.

Abb. 9: $A - 2\sqrt{2} \cdot B$



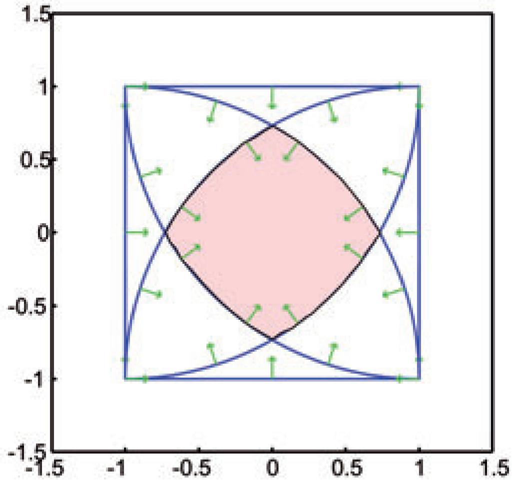


Abb. 10: $A - 4 \cdot B$

Diese Mengenarithmetik wird u.a. eingesetzt in Computeranimationen zum Bewegen von Objekten und beim dynamischen Umformen einer Figur in eine andere, dem so genannten **Morphing**.

Ein weiterer Anknüpfungspunkt findet sich in der **mengenwertigen Interpolation**. Dabei wird eine komplizierte mengenwertige Funktion (d.h. die Funktionswerte sind nicht Vektoren, sondern Mengen) durch eine viel einfacher zu beschreibende ersetzt, die in wenigen Datenvorgaben mit der ursprünglichen Funktion übereinstimmt. Im Falle einer Funktion einer Veränderlichen ergibt sich bei ein, zwei oder drei Mengenvorgaben die konstante, lineare bzw. quadratische Interpolation. Um den Fehler an Zwischenstellen klein zu halten, wendet man das Verfahren stückweise auf Teilintervalle an.

Durch mengenwertige Integration der stückweise Interpolierenden gewinnt man Quadraturverfahren, z.B. die mengenwertige Treppensumme oder Trapezregel. Auch die Berechnung der Fläche unter der Parabel in Abb. 1 lässt sich so interpretieren. Solch ein mengenwertiges Integral wurde vom Mathematiker Robert J. Aumann (1965) eingeführt, der 2005 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften erhalten hat. Durch dieses **Aumann-Integral** kann man auch die Menge der Endpunkte aller zulässigen Lösungen eines linearen Steuerungsproblems, die so genannte **erreichbare Menge**, beschreiben. Diese Menge ist für lineare Steuerungsprobleme immer konvex, was ihre numerische Approximation erheblich erleichtert.

Für ein spezielles Steuerungsproblem, eine angeregte Schwingung, werden in Abb. 13 die erreichbaren Mengen für variable Endzeiten $t_f \in [0, 2\pi]$ approximiert. Es dient hier als Modellproblem, das auch mit dem Pontryaginschen Maximumprinzip aus der Kontrolltheorie behandelt werden könnte. Im Folgenden sollen die erreichbaren Mengen durch mengenwertige Integration berechnet werden. In Abb. 11 ist das zugehörige Aumann-Integral für die Endzeit 2π als Menge gewöhnlicher Integrale notiert.

Die Funktionen $u(\cdot)$ müssen dabei integrierbar sein und zu jedem Zeitpunkt die Beschränkung $-1 \leq u(\tau) \leq 1$ erfüllen, ihre Werte sind also Auswahlen aus dem Steuerbereich $U = [-1,1]$.

Ein naiver Weg, das Aumann-Integral zu approximieren, wäre es, die Steuerungsfunktion $u(\cdot)$ in Abb. 11 stückweise konstant anzusetzen und an jedem Gitterpunkt nur zufällig aus den Randpunkten des Steuerbereichs U auszuwählen, vgl. Abb. 12. Die zugehörigen Lösungen des zugrunde liegenden Kontrollproblems zu verschiedenen Auswahlen starten zum Zeitpunkt $t = 0$ alle im Ursprung und sind zur besseren Unterscheidbarkeit in verschiedenen Farben gezeichnet worden.

Um Approximationen zu erhalten, die zur Endzeit $t_f = 2\pi$ nahe an der tatsächlichen erreichbaren Menge liegen, muss man aber sehr viele Schwingungen bestimmen, selbst 20000 ergeben noch kein wesentlich genaueres Bild.

Aufgrund dieser Schwierigkeiten bieten sich mengenwertige Quadraturverfahren für lineare Kontrollprobleme an. In Abb. 13 und Abb. 14 sieht man Ergebnisse der Treppensumme für 50 Teilintervalle bzw. der Trapezregel für 30 Teilintervalle. Dabei ist zu beachten, dass bei der Trapezregel eine gröbere Schrittweite verwendet wurde und daher der Gesamtrechenaufwand niedriger ist. Um Zwischenwerte besser zu approximieren, wurde in Abb.14 die stückweise quadratische Interpolation verwendet, in Abb. 13 dagegen nur die stückweise lineare Interpolation.

Während bei der stückweise linearen Interpolation nur positive Gewichte an den Teilintervallenden auftreten, kommen bei der quadra-

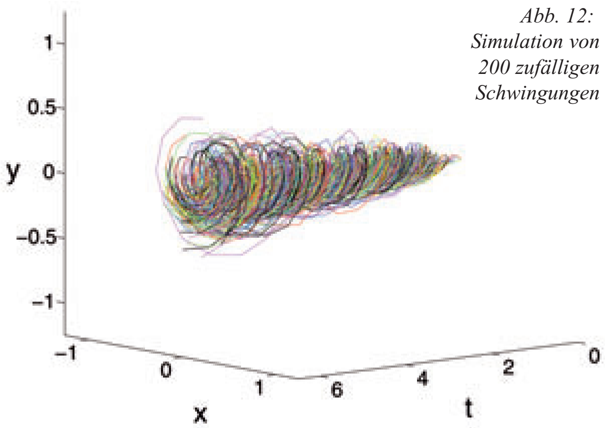


Abb. 12: Simulation von 200 zufälligen Schwingungen

$$\left\{ \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} \sin(4(2\pi - \tau)) \\ \cos(4(2\pi - \tau)) \end{pmatrix} u(\tau)\, d\tau \;\middle|\; u(\tau) \in [-1, 1] \right\}$$

Abb. 11: Aumann-Integral

tischen Interpolation auch negative Gewichte bei der Berechnung der interpolierenden mengenwertigen Funktion an Zwischenstellen vor (vergl. Abb. 15). Die Mengensubtraktion kann hier also nicht vermieden werden.
In Abb. 16 ist – mehr aus ästhetischen Gründen – die *x*-*y*-Projektion der erreichbaren Mengen, berechnet mit der Trapezregel, dargestellt.

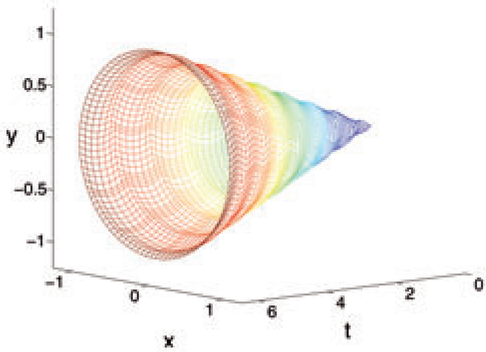


Abb. 13: Treppensumme mit 50 Teilintervallen

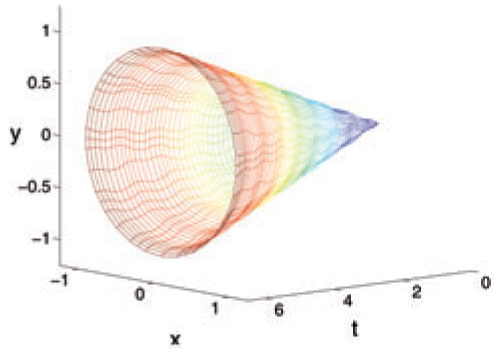
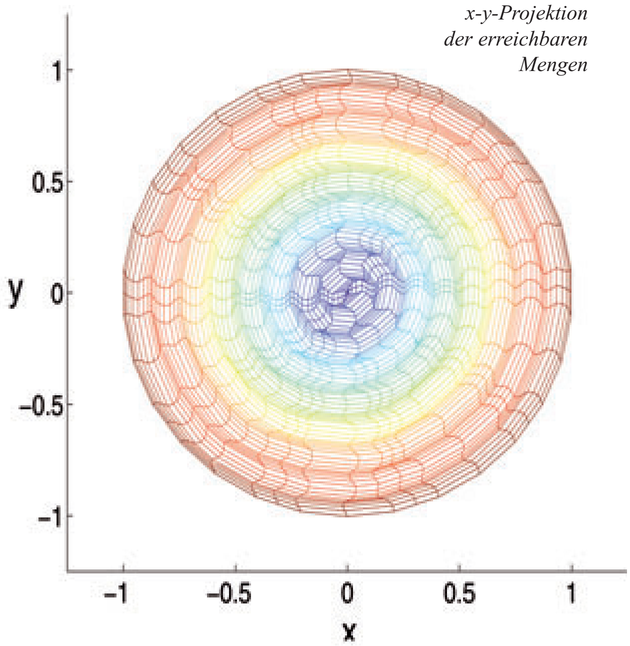


Abb. 14: Trapezregel mit 30 Teilintervallen

Abb. 15: lineare und quadratische Interpolation

Interpolationsart	Approximation zur Zeit $t = t_j + h/2$
stückweise linear	$\frac{1}{2} \cdot F(t_j) + \frac{1}{2} \cdot F(t_{j+1})$
stückweise quadratisch	$\frac{3}{8} \cdot F(t_j) + \frac{3}{4} \cdot F(t_{j+1}) - \frac{1}{8} \cdot F(t_{j+2})$

Abb. 16: x-y-Projektion der erreichbaren Mengen



Mengenwertige Numerik in der Klimafolgenforschung

Die mengenwertige Numerik kann auch eingesetzt werden für die Approximation der Menge aller zulässigen Lösungen dynamischer Systeme mit Unsicherheiten, z.B. in der **Klimafolgenforschung**. Dynamische Systeme modellieren Prozesse, die sich zeitlich verändern. Für das folgende dreidimensionale nichtlineare, zustandsbeschränkte System zur Modellierung der globalen Erwärmung aus Petschel-Held et al. (1999) führen wir dies etwas näher aus:

$$
\begin{aligned}
&F'(t) = E(t)\,,\\
&C'(t) = B \cdot F(t) + \beta \cdot E(t) - \sigma \cdot (C(t) - C_1)\,,\\
&T'(t) = \mu \cdot \ln\left(\tfrac{C(t)}{C_1}\right) - \alpha \cdot (T(t) - T_1)\,,\\
&(C(t), T(t)) \in W\,,\\
&E_{min}(t) \le E(t) \le E_{max}(t) \qquad (0 \le t \le t_f)\,.
\end{aligned}
$$

Abb. 17: Klimawandelmodell

Darin ist t die Zeitvariable und $E(t)$ der vom Menschen verursachte (über ein Jahr gemittelte) Kohlenstoffeintrag in die Erdatmosphäre, der die Rolle einer Steuerungsfunktion für das System übernimmt. Zustandsvariablen sind der zeitlich kumulierte Kohlenstoffeintrag $F(t)$, der atmosphärische Kohlenstoffgehalt $C(t)$ und die globale Jahresdurchschnittstemperatur $T(t)$. Die Zustandsbeschränkungen werden durch das so genannte **tolerierbare Fenster** W aus Abb. 18 beschrieben.
Die zeitabhängigen Schranken für die Steuerungen werden gemäß Abb. 19 gewählt. Zur Interpretation des Modells und zur konkreten Wahl der Maßeinheiten, Anfangsbedingungen und Modellparameter vergleiche man Petschel-Held et al. (1999).
Ziel ist es nun, **alle** zulässigen Steuerungen und zugehörigen Zustandstrajektorien zu berechnen, die die Systemgleichungen lösen und sämtliche Zustands- und Steuerbeschränkungen erfüllen. Dieses Ziel wird mit dem folgenden mengenwertigen Euler-Verfahren für zustandsbeschränkte dynamische Systeme erreicht, vgl. Abb. 20. Die numerischen Resultate können dann als Entscheidungshilfe dafür dienen, welche Emissionsprofile $E(t)$ tolerierbar sind.
Hierbei ist Y_0 die Startmenge der Rekursion, h die Zeitschrittweite und N die Anzahl der Teilintervalle, in die das Zeitintervall $[0, t_f]$ zerlegt wird. $V(t_j, \eta)$ ist die (dreidimensionale) so genannte Geschwindigkeitsmenge. Sie ergibt

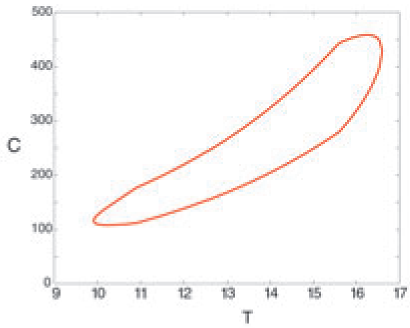


Abb. 18: Tolerierbares Fenster

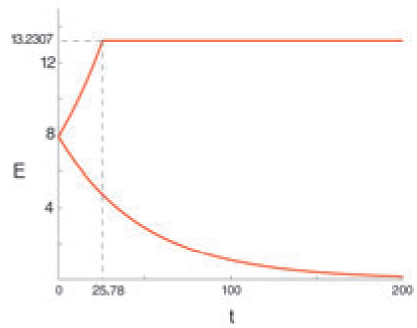


Abb. 19: Schranken für E(·)

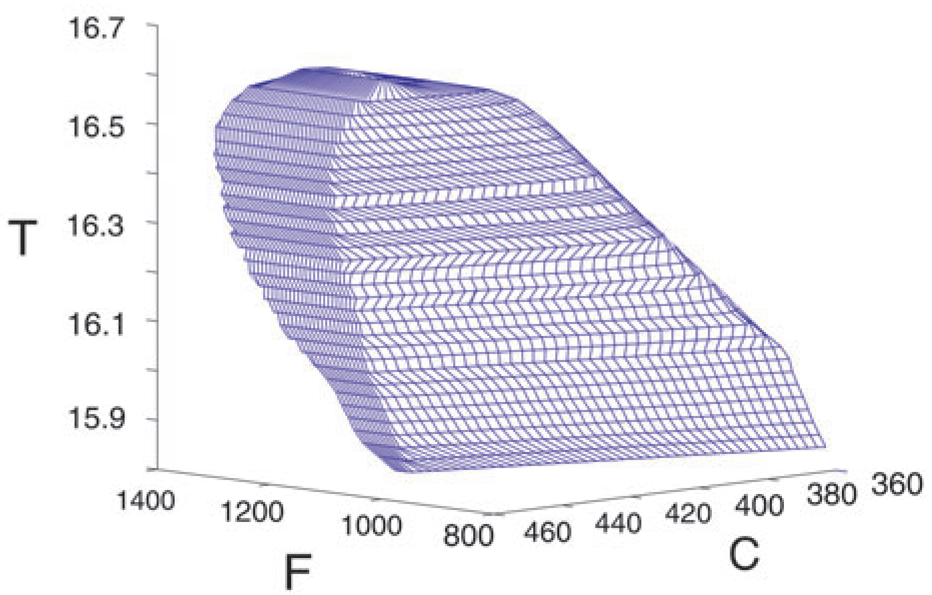
Von Eudoxos bis zur Klimafolgenforschung

Abb. 20: Mengenwertiges Euler-Verfahren

$$Y_0 \subset \mathbb{R} \times W$$
$$Y_{j+1} = \bigcup_{\eta \in Y_j} \left((\eta + hV(t_j, \eta)) \cap (\mathbb{R} \times W) \right)$$
$$(j = 0, \ldots, N-1)$$

sich durch Einsetzen aller Steuerungswerte in die rechte Seite der Systemgleichung aus Abb. 17, die im Zeitpunkt t_j und im Zustand η (mit den Koordinaten *F, C, T*) die Steuerbeschränkungen erfüllen.
Dies ist der wesentliche Unterschied zu gewöhnlichen Differentialgleichungen, wo die Menge $V(t,\eta)$ stets **einpunktig** ist. Die Durchführung des Algorithmus erfordert also die Übergabe von **Mengen** $V(t,\eta)$ an den Rechner. Dazu sind diese Mengen durch Finite Element-Gitter im Sinne des ersten Abschnittes zu approximieren, die Zustandsbeschränkungen sind in jedem Gitterpunkt einzuhalten. Gegenüber den im zweiten Abschnitt eingeführten Mengenoperationen muss zusätzlich die Vereinigung auch nichtkonvexer Mengen implementiert werden. Dies ist für Finite Element-Approximationen möglich. In mathematischer Fachterminologie erzeugt damit das mengenwertige Euler-Verfahren eine Folge von Vereinigungen simplizialer Komplexe, die die Menge aller zulässigen Trajektorien diskret approximiert.
Zur numerischen Analyse und Durchführung dieses Verfahrens vergleiche man die Dissertation von Chahma (2003). Stabilitätsbeweise und Konvergenzordnungsabschätzungen finden sich für eine etwas allgemeinere Problemklasse in Baier et al. (2007).
Das mengenwertige Euler-Verfahren vermittelt Einsichten in die zeitliche Entwicklung der zulässigen Zustände des Klimawandelmodells auch auf langen Zeitintervallen. Wegen der Komplexität der mengenwertigen Numerik ist der erforderliche Rechenaufwand groß, aber für die Zustandsraumdimension 3 mit den an der Universität Bayreuth zur Verfügung stehenden Rechnern im parallelen Verbund noch realisierbar. Abb. 21 zeigt die mit dem mengenwertigen Euler-Verfahren berechnete erreichbare Menge nach 200 Jahren. Dies ist also eine Approximation **aller Endzustände** zulässiger Zustandstrajektorien.
Durch interaktive Rotation dieser Menge erhält man einen guten Eindruck von ihrer dreidimensionalen Struktur. Durch Vergleich ihrer Projektionen auf die drei Koordinatenebenen des Zustandsraumes mit dem tolerierbaren Fenster in Abb. 18 erkennt man, dass sich die Zustandsrestriktionen wesentlich auswirken. Unvorsichtig oder verantwortungslos gewählte Emissionsprofile E(·) führen zu unzulässigen, nicht überlebensfähigen Zustandstrajektorien. ■

Abb. 21: Erreichbare Menge nach 200 Jahren



Literatur

R.J. Aumann. Integrals of set-valued functions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 12:1–12, 1965.

R. Baier, I.A. Chahma, and F. Lempio. Stability and Convergence of Euler's Method for State-Constrained Differential Inclusions. SIAM Journal on Optimization, 18:1004–1026, 2007.

R. Baier and E. Farkhi. Differences of Convex Compact Sets in the Space of Directed Sets, Part I: The Space of Directed Sets and Part II: Visualization of Directed Sets. Set-Valued Analysis, 9:217–245, 247–272, 2001.

D. Braess. Finite Elemente – Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie, 4., verb. Auflage. Springer-Verlag, Berlin, 2007.

I.A. Chahma. Set-valued discrete approximation of state-constrained differential inclusions. Bayreuther Mathematische Schriften, 67:3–162, 2003.

R. Courant. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. Bulletin of the American Mathematical Society, 49:1–23, 1943.

H.H. Goldstine. A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century. Springer-Verlag, New York, 1980.

F. Lempio. Set-valued interpolation, differential inclusions, and sensitivity in optimization.
In R. Lucchetti and J. Revalski, editors, Recent Developments in Well-Posed Variational Problems, pages 137–169, Dordrecht, 1995. Kluwer.

G. Petschel-Held, H.-J. Schellnhuber, T. Bruckner, and F. L. Tóth. The tolerable windows approach: theoretical and methodological foundations. Climatic Change, 41:303–331, 1999.

K.H. Schellbach. Probleme der Variationsrechnung. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 41:293–363, 1851.

Gerhard Rein

Mathematik und das Universum

Der vorliegende Aufsatz ist die leicht überarbeitete Fassung eines Vortrags, den ich beim Tag der Mathematik im Juli 2007 an der Universität Bayreuth gehalten habe. Einer meiner Doktoranden kommentierte vor dem Vortrag dessen Titel mit der Frage, ob ich es nicht etwas kleiner hätte. Tatsächlich ist das Ziel meines Aufsatzes bescheidener, als der Titel vermuten lässt: Ich möchte anhand einiger Beispiele die Beziehung zwischen Mathematik und Physik beleuchten. Bei diesen Beispielen handelt es sich nur um kleine Teile des Universums, die in meiner eigenen wissenschaftlichen Arbeit eine Rolle spielen, wie z.B. Galaxien oder schwarze Löcher.

Prof. Dr. Gerhard Rein

Beginnen möchte ich diese Betrachtungen zur Beziehung zwischen Mathematik und Physik jedoch mit einer einfachen Frage:

Wie groß ist die Winkelsumme im Dreieck?

An dieser Stelle sollte sich Ihr Schulwissen mit der Antwort 180º zu Wort melden. Zur Erinnerung: Mit den Bezeichnungen aus Abb. 1 gilt:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

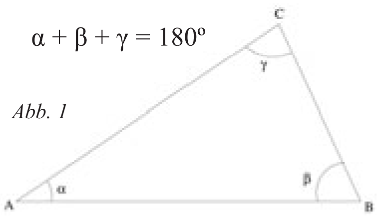


Abb. 1

Handelt es sich dabei um eine Aussage aus der Mathematik oder aus der Physik?

Für die erste Ansicht spricht, dass man diese Aussage mathematisch beweisen kann, etwa so:

... und der Beweis dazu

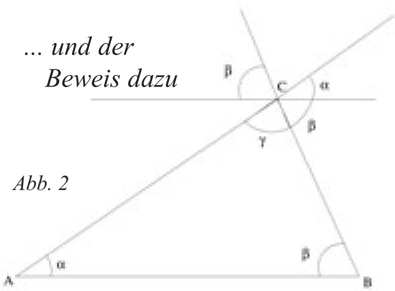


Abb. 2

Wir denken uns durch das Eck C die zur Seite AB parallele Gerade gezogen und die Seiten AC und BC jeweils über C hinaus verlängert, vgl. Abb. 2. Die Verlängerung von AC schneidet die beiden parallelen Geraden jeweils unter dem gleichen Winkel, so dass wir den Winkel α wie in Abb. 2 eingezeichnet nochmals am Eck C finden. Mit dem gleichen Argument finden wir den Winkel β am Eck C, und weil zwei Winkel gleich groß sind, wenn sie einander an zwei sich schneidenden Geraden – in unserem Fall die Parallele und BC – gegenüberliegen, finden wir die Winkel α, β, γ schließlich so am Eck C angeordnet, dass sich als Summe ein gerader Winkel, also 180º, ergibt.

In obigem Beweis haben wir die Behauptung aus anderen Aussagen wie z.B. den Eigenschaften paralleler Geraden gefolgert, die im Rahmen der euklidischen Geometrie gelten. Dort sind für die elementaren Objekte wie Punkte, Geraden und Winkel einige einfache Regeln, die sogenannten Axiome, als gültig verabredet. Eine Aussage wie obiges $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ gilt als wahr im Rahmen der euklidischen Geometrie, wenn sie sich durch eine Kette von logischen Schlüssen aus den Axiomen herleiten lässt; obiger Beweis ist offenbar nur ein Glied in so einer Kette, da ich mich mit den Axiomen der euklidischen Geometrie hier nicht weiter befassen will.

Der Zusatz „im Rahmen der euklidischen Geometrie“ ist dabei essentiell, denn es gibt in der Mathematik auch andere, logisch ebenso konsistente Geometrien, in denen z.B. $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ nicht gilt. Als Beispiel betrachten wir die geometrischen Verhältnisse auf einer Sphäre, also einer Kugeloberfläche. Dazu überlegen wir zunächst, welche Kurven oder Linien auf der Sphäre die Rolle der Geraden in der euklidischen Geometrie spielen. Da letztere genau die Kurven sind, die zwischen je zwei vorgegebenen Punkten die kürzeste Verbindung realisieren, definieren wir als Verallgemeinerung der euklidischen Geraden die sogenannten Geodäten als die Kurven auf der Sphäre, die zu je zwei vorgegebenen Punkten wiederum die kürzeste Verbindung liefern. Solche Geodäten können wir in jedem Raum betrachten, in dem wir verabredet haben, wie wir Längen von Kurven messen wollen. Im Fall der Sphäre liefert dies die als Großkreise bezeichneten Schnittkurven der Sphäre mit Ebenen durch deren Mittelpunkt.

Mathematik und das Universum

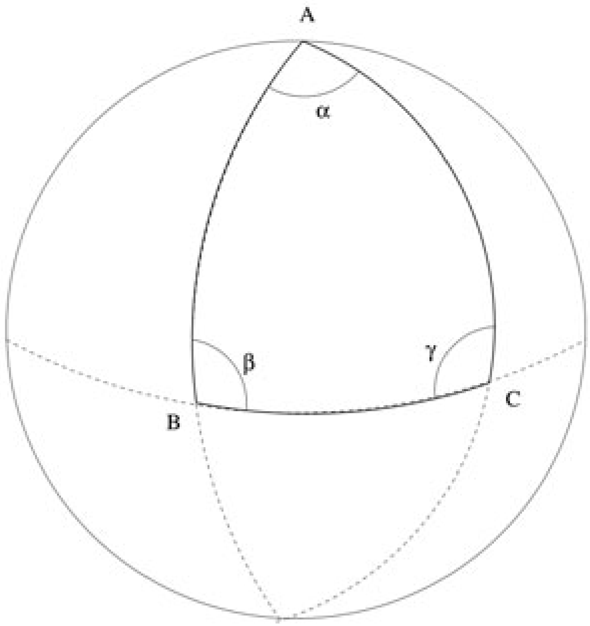


Abb. 3:
$\alpha + \beta + \gamma > 180^o$

Der Äquator und die Längenkreise auf einem Globus sind also Geodäten, und wir können auf der Sphäre ein Dreieck aus Geodäten konstruieren, indem wir wie in Abb. 3 am Nordpol starten, längs eines Längenkreises zum Äquator laufen, dem Äquator ein Stück nach Osten folgen und dann auf einem anderen Längenkreis zum Nordpol zurücklaufen. In diesem Dreieck ist die Summe der Innenwinkel größer als 180º, denn $\beta = \gamma = 90^o$ unabhängig davon, wie weit wir nach Osten gelaufen sind, d.h., wie groß α ist.

Dies erklärt sich natürlich dadurch, dass die Sphäre kein ebenes, euklidisches Flächenstück ist, sondern sich in dem umgebenden dreidimensionalen euklidischen Raum krümmt, von dem sie andererseits die metrische Struktur, also die Art und Weise wie Längen und Winkel gemessen werden, vererbt bekommt.

Im 19.Jahrhundert aber hat C.F. Gauß (1777–1855) eine neue Sichtweise auf geometrische Räume erdacht, welche die geometrischen Verhältnisse in einem solchen Raum völlig intrinsisch beschreibt, d.h. aus ihm selbst heraus und ohne Bezugnahme auf einen eventuell umgebenden euklidischen Raum. Um diese intrinsische Sichtweise besser zu verstehen, stellen wir uns vor, auf obiger Sphäre leben zweidimensionale, intelligente Wesen, nennen wir sie 2Dlinge, deren Wahrnehmungs- und Vorstellungsvermögen auf die zwei Raumdimensionen ihrer Sphärenwelt beschränkt sind. Solange sich die 2Dlinge nur auf einem genügend kleinen Stück ihrer Welt herumbewegen, stellen sie keine oder kaum messbare Abweichungen der Geometrie von der ebenen, euklidischen fest. Aber sobald die 2Dlinge größere Stücke ihrer Welt wie z.B. obiges Geodätendreieck ausmessen, werden sie feststellen, dass die Geometrie ihrer Welt signifikant von der euklidischen abweicht. Wenn wir nun den 2Dlingen erklären, dies liege daran, dass sich ihre zweidimensionale Welt wie eine Sphäre in einem umgebenden dreidimensionalen euklidischen Raum krümmt, so nützt ihnen das angesichts der Tatsache, dass sie mit ihrem Wahrnehmungs- und Vorstellungsvermögen in zwei Dimensionen gefangen sind, wenig. Viel nützlicher ist ihnen die von Gauß gefundene Geometriebeschreibung, mit der sie ein mathematisches Modell ihrer Welt aufstellen können, in dem nur Größen und Konzepte verwendet werden, die ihrer zweidimensionalen Wahrnehmung und den ihnen möglichen, zweidimensionalen Messungen zugänglich sind. Ein solches mathematisches Modell können die 2Dlinge als Basis für ihre Physik benutzen. Umfassend und für Räume beliebiger Dimension hat B. Riemann (1826–1866), ein Schüler von Gauß, die intrinsische Sichtweise der Geometrie entwickelt.

Wir sehen also: Die mathematische Antwort auf die Frage nach der Winkelsumme im Dreieck hängt davon ab, welche Geometrie, welche Axiome wir zugrundelegen. Sofern ein Axiomensystem widerspruchsfrei ist, gibt es im Rahmen der Mathematik keine Möglichkeit, seinen Wahrheitsgehalt zu untersuchen. „Wahr" heißt in der Mathematik immer nur, „logisch korrekt aus den gegebenen Voraussetzungen, also aus den Axiomen, gefolgert".

Aber eine geometrische Aussage wie obiges $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$ lässt sich mit gleichem Recht als Aussage der Physik über den uns umgebenden, realen, dreidimensionalen Raum auffassen, denn man kann ihren Wahrheitsgehalt ja durch Nachmessen bei konkreten, in der physikalischen Realität vorhandenen Dreiecken überprüfen.

In den Jahren 1818–1825 hatte Gauß den Auftrag, das Königreich Hannover zu vermessen. In diesem Zusammenhang bestimmte er mit von ihm selbst entworfenen Messinstrumenten die Winkelsumme des Dreiecks, das von den Spitzen der drei Berge Brocken, Inselsberg und Hoher Hagen gebildet wird. Unter Wissenschaftshistorikern ist umstritten, ob er mit dieser Messung nur die Genauigkeit seiner Messinstrumente an diesem recht großen Dreieck überprüfen wollte – die Seitenlängen betragen immerhin 160 km, 84 km, 68 km –, oder ob er klären wollte, wie die Geometrie des physikalischen Raums beschaffen ist. Die mathematischen Konzepte zur Beschreibung eines dreidimensionalen, nicht euklidischen, gekrümmten Raumes, in dem das Resultat nicht 180º wäre, beruhen jedenfalls auf seinen Einsichten, auch wenn unklar ist, ob sie ihm zum Zeitpunkt dieser Messungen schon zur Verfügung standen. Beachten Sie, dass die entsprechenden Winkel dadurch gemessen wurden, dass von jeweils einer der drei Bergspitzen aus die beiden anderen optisch anvisiert wurden. Die Seitenlinien waren physikalisch also durch Lichtstrahlen realisiert, so dass insbesondere die Krümmung der Erdoberfläche das Messergebnis nicht beeinflusste.

Gauß fand im Rahmen der ihm zur Verfügung stehenden Messgenauigkeit das Ergebnis 180º, und natürlich ging man in der Physik seit Jahrhunderten davon aus, dass für den physikalischen Raum die Gesetze der dreidimensionalen euklidischen

Geometrie gelten. Aber als physikalische Aussage ist $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ nur so lange wahr, wie sie im Rahmen der jeweils aktuell möglichen Messgenauigkeit nicht falsifiziert ist.
Was obige geometrische Betrachtungen mit dem Universum zu tun haben, in dem wir 3Dlinge leben, wird im nächsten Teil meines Aufsatzes klarer werden, den ich wieder an einer konkreten Frage aufhängen will:

Gibt es schwarze Löcher?

Diese Frage hat wieder einen mathematischen und einen physikalischen Aspekt: Besitzt das hier zuständige mathematische Modell, die allgemeine Relativitätstheorie, Lösungen mit den Eigenschaften, die zu dem Begriff des schwarzen Lochs geführt haben? Und gibt es Beobachtungsdaten von realen, astronomischen Objekten, die zu diesen mathematisch vorhergesagten Eigenschaften passen?
Um diese Fragen zu diskutieren, ist zunächst eine wenn auch sehr verkürzte Einführung in die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie nötig. Diese Theorie, die A. Einstein (1879–1955) im Jahr 1915 veröffentlichte, hat das Ziel, Raum, Zeit, Materie, Gravitation und deren Zusammenspiel zu beschreiben.
Dabei werden Raum und Zeit zu einem vierdimensionalen geometrischen Raum, der Raumzeit, zusammengefasst. Die vier Dimensionen ergeben sich einfach als Summe von drei räumlichen und einer zeitlichen Dimension. Um ein bestimmtes Ereignis, z.B. die Explosion einer Sylvesterfeuerwerksrakete, in Raum und Zeit zu lokalisieren, braucht man vier Koordinatenangaben. Die Vierdimensionalität ist im Vergleich zur vor-relativistischen Physik nicht neu, neu ist aber, dass in der allgemeinen Relativitätstheorie die klare Trennung zwischen Raumkoordinaten und Zeitangaben nicht aufrechterhalten werden kann. Ein einzelner Beobachter kann einem Ereignis in seinem Bezugssystem zwar noch drei Orts- und eine Zeitkoordinate zuordnen, aber wenn man diese Daten in das Bezugssystem eines anderen Beobachters umrechnet, werden bei der Berechnung der neuen Orts- oder Zeitkoordinaten jeweils die alten Orts- und Zeitkoordinaten vermischt. Die Trennung in Raum und Zeit ist damit nicht mehr absolut, sondern abhängig vom jeweiligen Beobachter bzw. seinem Bezugssystem.
Die geometrischen Verhältnisse in der vierdimensionalen Raumzeit werden nun durch die Verteilung der Materie in der Raumzeit bestimmt, und dies wird durch die Einsteinschen Feldgleichungen, ein sehr kompliziertes System sogenannter partieller Differentialgleichungen, mathematisch erfasst. Insbesondere ist die Raumzeit im allgemeinen gekrümmt, und dank Gauß und Riemann verfügen wir über die Hilfsmittel, um diese Krümmung mathematisch zu verstehen, ohne dass wir 3Dlinge versuchen müssen, uns diese Gekrümmtheit in einem noch höher dimensionalen Raum vorzustellen.
Umgekehrt bestimmt die geometrische Struktur der Raumzeit wie oben besprochen die Geodäten. Diese werden im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie physikalisch als Bahnen von Objekten wie Satelliten im Schwerefeld der Erde, Planeten im Sonnensystem, einzelnen Sternen in einer Galaxie oder auch von Lichtstrahlen interpretiert. Gravitation ist in dieser Beschreibung keine auf diese Objekte wirkende Kraft mehr, sondern sie ist in der geometrischen Struktur, in der Krümmung der Raumzeit, kodiert.

In unserem Sonnensystem ist die Gravitation verglichen etwa mit der Umgebung eines schwarzen Lochs relativ schwach, typische Geschwindigkeiten sind verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit relativ niedrig, und es ist verglichen mit dem Universum relativ klein. Unter diesen Umständen sagt die allgemeine Relativitätstheorie nur sehr geringe Abweichungen von der vor-relativistischen, newtonschen Physik voraus. Dennoch konnten einige dieser Abweichungen bereits kurz nach Veröffentlichung der Theorie mit Beobachtungsdaten verglichen und die Theorie so empirisch bestätigt werden. Erstaunlicher ist vielleicht, dass diese Abweichungen sogar in der Umgebung unserer Erde so groß sind, dass mindestens eine, mittlerweite allgemein gebräuchliche Errungenschaft unseres High-Tech-Zeitalters nicht korrekt funktionieren würde, würde man die Korrekturen der allgemeinen Relativistätstheorie nicht berücksichtigen; auf diesen Punkt komme ich am Schluss meines Aufsatzes zurück.

Zunächst aber zurück zu der Frage nach der Existenz schwarzer Löcher. Im Jahr 1939 erschien eine Arbeit von J.R. Oppenheimer und H. Snyder, in der eine Lösung des mathematischen Modells „allgemeine Relativitätstheorie“ analysiert wurde, deren Verhalten ich in Abb. 4 zu skizzieren versuche.

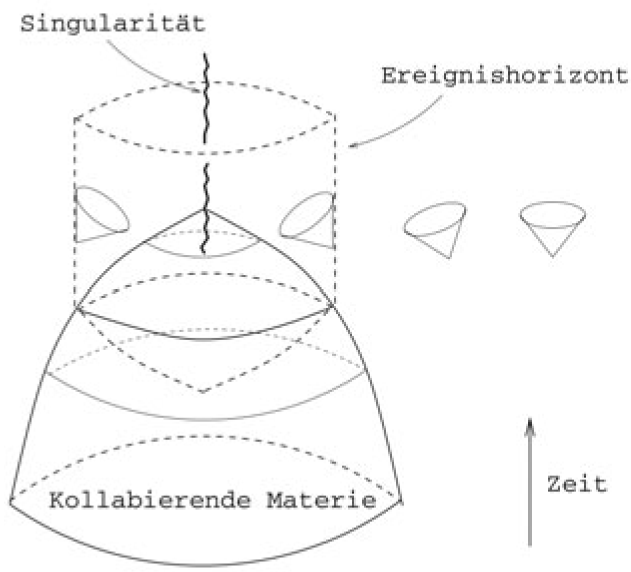


Abb. 4: Die Geometrie eines Gravitationskollapses

Mathematik und das Universum

In dieser Abbildung ist die Zeitkoordinate vertikal und zwei Raumdimensionen sind horizontal aufgetragen; eine Raumdimension wird unterdrückt. Zu einem bestimmten Anfangszeitpunkt ist eine kugelförmige Materieverteilung vorgegeben, die in der Skizze als Kreisscheibe erscheint. Diese Materiekugel zieht sich unter dem Einfluss der Gravitation zusammen. In dem benutzten Materiemodell baut die Materie keine diesem Kollaps entgegengerichteten Kräfte auf, so dass sie in eine immer kleinere Kugel zusammengepresst wird. Sobald dieser Kollaps weit genug fortgeschritten ist, entsteht vom Zentrum der Materie her eine Fläche, die solange anwächst, bis die gesamte Materie innerhalb dieser Fläche liegt. Diese Fläche, der sogenannte Ereignishorizont, hat folgende geometrische Eigenschaft: Die Raumzeit ist an dieser Fläche so stark nach innen gekrümmt, dass alle den Bahnen von materiellen Teilchen oder Lichtstrahlen entsprechenden Geodäten diese Fläche nur von außen nach innen passieren können, aber nicht in umgekehrter Richtung. In der Skizze ist dies durch die Orientierung einiger sogenannter Lichtkegel verdeutlicht.

Ein Lichtkegel besteht aus den in einem Punkt der Raumzeit angetragenen Richtungen, in die sich Lichtstrahlen von diesem Punkt aus bewegen können. Ist die Raumzeit nicht gekrümmt, d.h. gravitationsfrei, so sind die Lichtkegel symmetrisch zur Zeitachse nach oben orientiert, wie der ganz rechts eingezeichnete; der Öffnungswinkel dieser Kegel ist durch die gewählten Zeit- und Längeneinheiten bestimmt, z.B. eine Sekunde als Zeiteinheit und eine Lichtsekunde (etwa 300.000 km) als Längeneinheit. Unter dem Einfluss der Krümmung der Raumzeit kippen diese Lichtkegel aber umso mehr nach innen, je näher wir dem Ereignishorizont kommen. Dort sind sie dann so stark nach innen geneigt, dass es für einen Lichtstrahl keine Richtung mehr gibt, die aus dem Ereignishorizont herausführt. Da sich materielle Objekte in der allgemeinen Relativitätstheorie stets langsamer als Licht bewegen, was sich geometrisch so ausdrückt, dass die entsprechende Bewegungsrichtung stets innerhalb des jeweiligen Lichtkegels liegt, können weder materielle Objekte noch Licht aus dem vom Ereignishorizont umschlossenen Bereich heraus.

Innerhalb des Ereignishorizonts kollabiert die Materieverteilung weiter, bis sie sich auf einen Punkt zusammengezogen hat. Dabei wächst die Krümmung der Raumzeit in diesem Mittelpunkt über alle Grenzen an und wird unendlich groß. Die Geometrie der Raumzeit selbst bricht dort zusammen; man spricht von einer Raumzeit-Singularität.

Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen mit einer Singularität, umgeben von einem Ereignishorizont, wie sie als Endprodukt in obigem Gravitationkollaps entstehen, wurden bereits 1916 von K. Schwarzschild hergeleitet, aber die Singularität und der Ereignishorizont wurden als unphysikalisch abgelehnt, u.a. mit dem Argument, dass die Schwarzschildsche Lösung nicht zeitabhängig ist und es darin also keinen Prozess gibt, in dem Singularität und Ereignishorizont aus einer regulären Ausgangskonfiguration entstehen. Dieses Gegenargument fällt bei der Oppenheimer-Snyder-Lösung weg. Andere Argumente wie etwa der berechtigte Einwand, dass sich die Materie in dem von Oppenheimer und Snyder verwendeten Modell nicht wie realistische Materie gegen das Zusammengedrücktwerden wehrt, können die Entstehung der Singularität und des Ereignishorizonts ebenfalls nicht abwenden, denn wenn man von einer realistischer modellierten Materiesorte nur eine hinreichende Masse zusammenbringt, erhält man im wesentlichen wieder einen Gravitationskollaps wie in Abb. 4.

Nachdem die Versuche gescheitert waren, diese exotischen, mathematischen Lösungen der Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie als unphysikalisch wegzudiskutieren, taufte der amerikanische Astrophysiker J.A. Wheeler sie 1967 auf den Namen „Black Hole“. Die Existenz von schwarzen Löchern als Lösungen der Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie ist eine mathematische Tatsache.

Bevor wir im realen Universum nach astrophysikalischen Objekten suchen, die diesen mathematischen Objekten entsprechen, möchte ich kurz auf eine sehr wichtige mathematische Frage im Zusammenhang mit schwarzen Löchern eingehen. Bei der Oppenheimer-Snyder-Lösung ist die Singularität hinter dem Ereignishorizont verborgen, sie kann von außen nicht beobachtet werden und den außerhalb des Ereignishorizonts liegenden Teil der Raumzeit in keiner Weise beeinflussen. Könnten aus der Singularität z.B. Lichtstrahlen zu einem Beobachter gelangen, so wäre es nicht einmal prinzipiell möglich, aus der Kenntnis des Anfangszustands der Raumzeit vorherzusagen, was dieser Beobachter sehen würde; das physikalische Geschehen wäre nicht mehr kausal determiniert. Erst die Tatsache, dass die Singularität, bei der die geometrische Struktur der Raumzeit zusammenbricht, durch den Ereignishorizont vom Rest der Raumzeit isoliert ist, ermöglicht es, in diesem Rest weiterhin konsistent Physik zu treiben. Bislang konnte man aber nicht zeigen, dass jede Singularität, die in einem Gravitationskollaps entsteht, hinter einem Ereignishorizont verborgen sein muss. Da dies für eine physikalisch konsistente Theorie wünschenswert ist, hat in den 1960er Jahren der Physiker und Mathematiker R. Penrose die Hypothese vom kosmischen Zensor eingeführt, welche besagt: Jede in einem Gravitationskollaps entstehende Singularität ist hinter einem Ereignishorizont verborgen. Die bislang offene mathematische Frage ist nun, ob die Gültigkeit dieser Hypothese aus den Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie folgt.

Diese Frage ist noch aus einem weiteren Grund interessant. Die Tatsache, dass an der Raumzeit-Singularität die Krümmung sehr groß wird – mathematisch gesehen sogar unendlich groß – bedeutet physikalisch, dass dort für sehr nahe benachbarte Punkte, also auf sehr kleinen Längenskalen, extrem hohe Kräfte wirken. Bei physikalischen Vorgängen auf sehr kleinen Längenskalen müssen aber Quanteneffekte berücksichtigt werden, die Physik in der Nähe der Singularität wäre also durch Quantengravitationseffekte entscheidend mit bestimmt. Diese könnten auch das Anwachsen der Krümmung über alle Grenzen, welches ja als Zusammenbruch der allgemeinen Relativitätstheorie an der Singularität zu interpretieren ist, verhindern. Ein zentrales Ziel der theoretischen Physik ist, eine Quantengravitationstheorie zu entwickeln, in der allgemeine Relativitätstheorie und Quantenmechanik vereint werden. Von daher wäre es eigentlich schade, wenn der kosmische Zensor verhindert, dass wir gerade die Stellen im Universum beobachten können, an denen sich diese neue Theorie am intensivsten manifestieren sollte, nämlich die Raumzeit-Singularitäten bzw. das Innere von schwarzen Löchern.

Die Tatsache, dass das mathematische Modell „allgemeine Relativitätstheorie" schwarze Löcher als Lösungen besitzt, bedeutet noch nicht, dass es diese auch in der Realität geben muss. Falls es solche Objekte im Universum tatsächlich gibt, sind sie nur indirekt nachzuweisen, denn sie senden ja weder Licht noch sonstige Strahlung aus. Sie können sich im wesentlichen nur dadurch bemerkbar machen, dass in ihrer Umgebung sehr starke Gravitationsfelder wirken, die Raumzeit also stark gekrümmt ist. Ich möchte auf zwei astronomische Beobachtungen eingehen, die mit der Existenz schwarzen Löcher erklärt werden können.

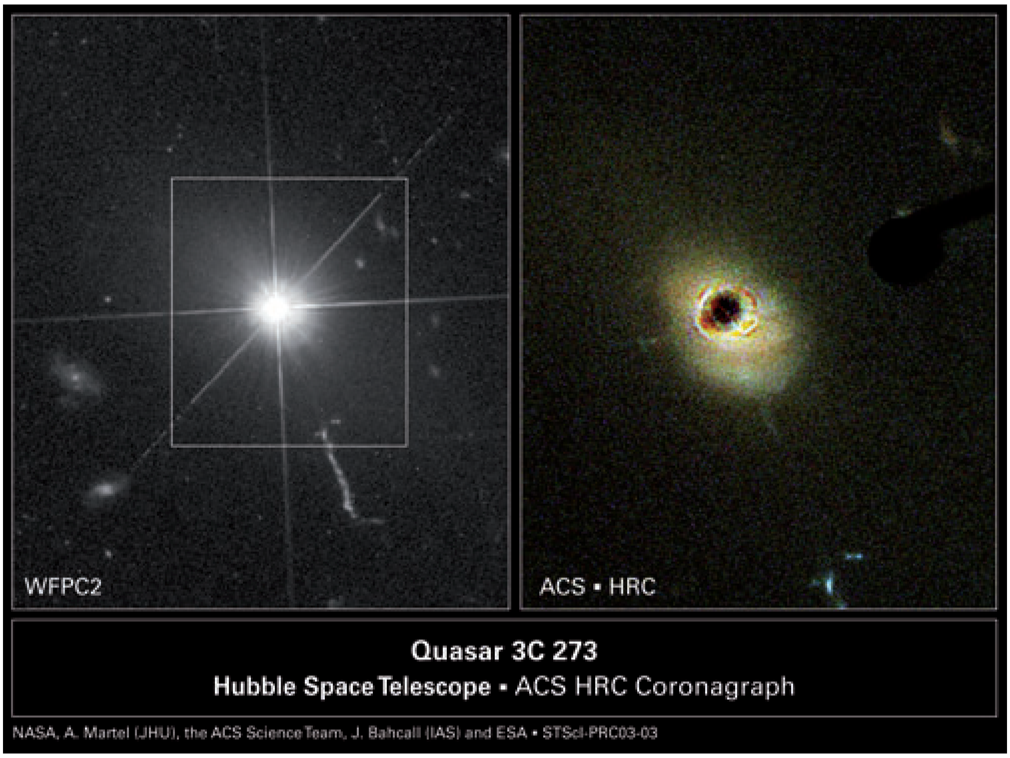


Abb. 5: Ein Quasar

Die linke Hälfte von Abb. 5 zeigt einen sogenannten Quasar.
Quasare sind extrem lichtstarke Objekte, die typischerweise die 10^{12}–10^{15}-fache Leuchtkraft unserer Sonne im Bereich des sichtbaren Lichts besitzen, sie senden vergleichbare Energiemengen in anderen Frequenzbereichen aus, sie besitzen typischerweise eine Masse von 10^6–10^9 Sonnenmassen, und sie sind alle sehr weit von der Erde entfernt, typischerweise 2–13 Milliarden Lichtjahre. Andererseits kann man aus den Beobachtungsdaten schließen, dass Quasare relativ kompakte Objekte sind; ein typischer Quasar passt bequem in unser Sonnensystem. Wie kann eine so gewaltige Masse auf so kleinem Raum zusammengeballt sein und so riesige Energiemengen freisetzen? In der rechten Hälfte von Abb. 5 ist der zentrale, extrem lichtstarke Bereich des Quasars ausgeblendet, und man sieht, dass der Quasar nicht isoliert im Universum sitzt, sondern mitten in einer Galaxie. Die bislang schlüssigste Erklärung für Quasare ist, dass es sich dabei um sehr massive schwarze Löcher handelt, die im Zentrum weit entfernter Galaxien sitzen. In so einer Galaxie gibt es neben Sternen auch große Mengen an Gas und Staub, die nun in das schwarze Loch hineingesaugt werden. Dabei werden diese Gas- und Staubwolken stark beschleunigt, sie umkreisen das schwarzen Loch in einer wirbelförmigen Akkretionsscheibe und werden dabei teilweise ionisiert und sehr stark aufgeheizt. Diese heißen, isonisierten Staub- und Gaswolken senden die beobachtete Strahlung aus, bevor sie durch den Ereignishorizont stürzen und nicht mehr beobachtet werden können. Entsprechenden Modellrechnungen zufolge wandelt dieser Prozess bis zu 20% der in das schwarze Loch stürzenden Materie in abgestrahlte Energie um; die Kernfusion in unserer Sonne bringt es im Vergleich dazu nur auf einen Anteil von etwa einem Prozent.
Abb. 6 zeigt Galaxien, die sich in wesentlich geringeren Entfernungen befinden. Diese Galaxien weisen in ihrem Zentrum eine sehr hohe Sterndichte auf. Die Astrophysiker sind mittlerweile in der Lage, die Bahnkurven dieser Sterne sehr

Mathematik und das Universum

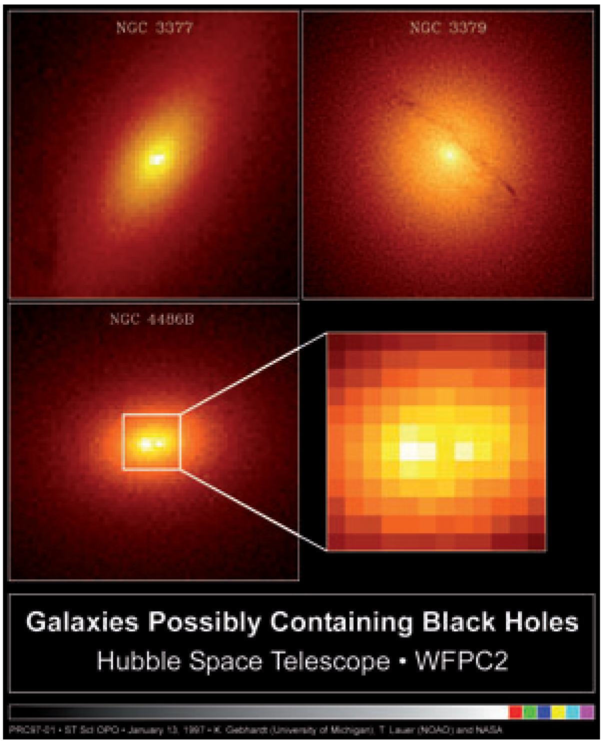


Abb. 6: Schwarze Löcher im Zentrum von Galaxien?

genau zu beobachten. Aus diesen sehr stark gekrümmten Bahnkurven mit relativ hohen Bahngeschwindigkeiten lässt sich schließen, dass im zentralen Bereich dieser Galaxien zusätzlich zu den beobachteten Sternen noch eine Masse der Größenordnung 10^6–10^9 Sonnenmassen vorhanden sein muss, konzentriert in einem relativ kleinen räumlichen Gebiet. Die gegenwärtig beste Erklärung ist wiederum, dass im Zentrum dieser Galaxien jeweils ein sehr massives schwarzes Loch sitzt, das die Sterne in seiner Umgebung auf die beobachteten, stark gekrümmten Bahnen zwingt.

Die beiden obigen Beobachtungen lassen sich bestens als zwei zu verschiedenen Zeiten gemachte Momentaufnahmen ein und derselben Geschichte verstehen. Da Quasare stets sehr weit von uns entfernt sind, sehen wir sie und die Galaxien, in denen sie sitzen, so, wie sie vor 2–13 Milliarden Jahren aussahen. Wir sehen also junge Galaxien, in denen die schwarzen Löcher gerade erst angefangen haben, die in ihrer Umgebung reichlich vorhandenen Staub- und Gaswolken aufzufressen und zum Teil in Licht und andere Strahlung umzuwandeln. Im Lauf der Zeit aber fressen sie ihre nähere Umgebung leer, gleichzeitig wird durch die emittierte Stahlung leichteres Material aus ihrer Umgebung weggeblasen, und schließlich bleibt ein schwarzen Loch übrig, in das kaum noch Material hineinfällt, welches deshalb auch kaum noch strahlt, und das sich nur noch in den Bahneigenschaften der Sterne seiner Umgebung bemerkbar macht. Und tatsächlich stammen die Bilder aus Abb. 6 ja aus unserer näheren Umgebung und damit auf kosmologischer Zeitskala aus unserer Gegenwart.

Da sich nach heutigem Verständnis nicht selten schwarze Löcher im Zentrum von Galaxien befinden, vermutlich auch im Zentrum unserer Milchstraße, stellt sich folgende weitere Frage:

Sind Galaxien stabil?

Stellen wir uns vor, wir könnten für die in Abb. 7 gezeigte Spiralgalaxie die Zeit wie in einem Zeitraffer um einige Milliarden Jahre vorspulen.

Wird diese Galaxie dann noch genauso oder zumindest so ähnlich aussehen? Oder wird sie vielleicht gar nicht mehr vorhanden sein, etwa weil ihr Gravitationsfeld zu schwach ist und sich ihre 10^{10}–10^{12} Sterne gleichmäßig im Weltall verteilt haben? Oder bewirkt die Gravitation im Gegenteil, dass sich die Galaxie immer weiter zusammenzieht, vielleicht gar zu einem schwarzen Loch kollabiert? Die Tatsache, dass wir im Universum eine riesige Zahl von Galaxien in ganz unterschiedlichen Entfernungen und damit aus ganz unterschiedlichen Entwicklungsphasen des Universums beobachten, legt die Vermutung nahe, dass solche Sternenwolken eine gewisse Stabilität besitzen.

Um den Begriff der Stabilität physikalisch wie mathematisch besser zu verstehen, betrachten wir zunächst ein einfaches Beispiel, nämlich ein physikalisches Pendel, vgl. Abb. 8.

Abb. 7: Eine Spiralgalaxie

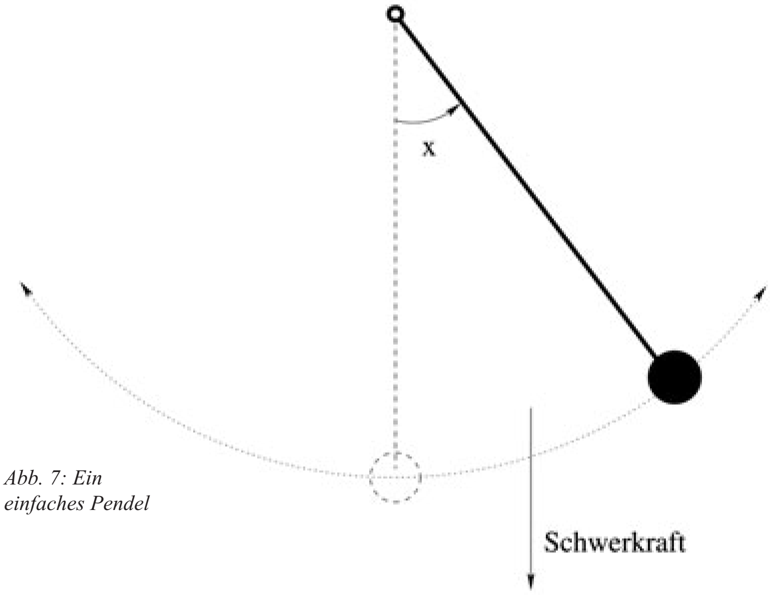
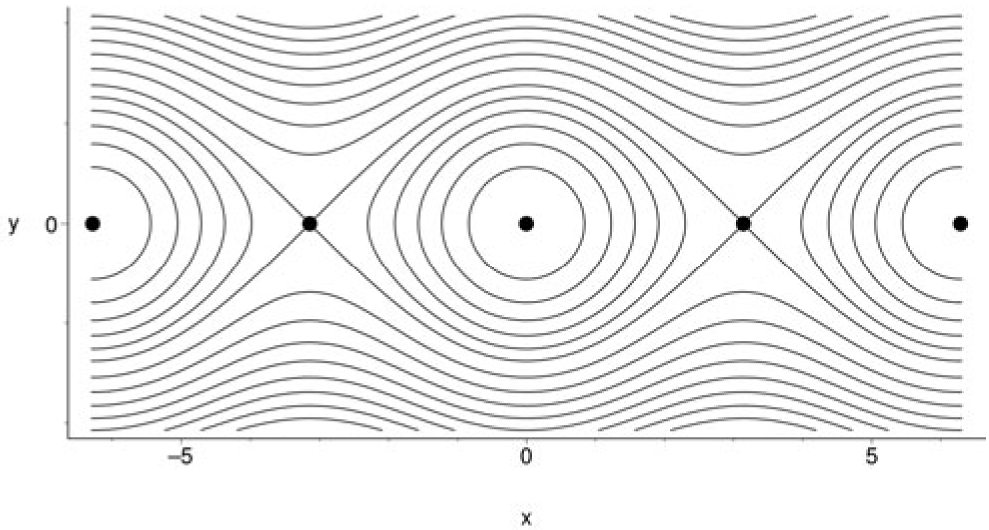


Abb. 7: Ein einfaches Pendel

An einem um eine feste Achse drehbaren Stab fester Länge hängt ein Gewicht, das von der Erdanziehung senkrecht nach unten gezogen wird. Die Masse des Stabes soll verglichen mit der Masse des Gewichts sehr klein sein, so dass wir sie vernachlässigen können. Ebenso sollen alle Reibungseffekte vernachlässigt werden.
Wir fragen zunächst nach den stationären Zuständen dieses Pendels, also nach den Zuständen, in denen sich das Pendel nicht bewegt. Ein solcher stationärer Zustand ist offenbar der, dass das Pendel senkrecht nach unten hängt, im folgenden Z_1 genannt. Es gibt aber noch einen zweiten, Z_2, nämlich dass das Pendel genau senkrecht über der Achse balanciert ist. Dass wir ein Pendel ohne Probleme in den Zustand Z_1 bringen können, aber wohl nie ein Pendel antreffen, das sich im Zustand Z_2 befindet, liegt daran, dass Z_1 stabil, Z_2 aber instabil ist. Kleine Störungen, wie sie in der physikalischen Realität stets vorhanden sind, etwa ein Luftzug oder eine leichte Vibration des Tisches, auf dem das Pendel aufgebaut ist, werden das Pendel nur minimal aus dem Zustand Z_1 auslenken, während das Pendel nach jeder noch so kleinen Störung den Zustand Z_2 verlässt und in einen qualitativ ganz anderen Bewegungszustand übergeht.
Für ein Pendel ist das unmittelbar und ohne Mathematik einsichtig, für eine Galaxie weniger. Wir können auch keine Experimente mit Galaxien machen, um dadurch ihre Mechanismen zu verstehen. Aber wir können mathematische Modelle aufstellen, welche die zeitliche Entwicklung einer Galaxie beschreiben. Ein solches, in der Astrophysik häufig benutztes Modell, welches keine relativistischen Effekte berücksichtigt, wollen wir hier mit *NGM* (nichtrelativistisches oder newtonsches Galaxienmodell) abkürzen; es handelt sich dabei wieder um ein nichtlineares System partieller Differentialgleichungen, das in der Mathematik Vlasov-Poisson-System heißt. Das entsprechende Modell im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie kürzen wir mit *RGM* (relativistisches Galaxienmodell, eigentlich Vlasov-Einstein-System genannt) ab. Beide Modelle besitzen zeitunabhängige Lösungen, also stationäre Zustände. Aber wie wir am Beispiel des Pendels gelernt haben, kommen nur stabile stationäre Zustände als Beschreibungen realer Galaxien in Frage.
Um die Stabilitätsfrage in den mathematischen Griff zu bekommen, kehren wir nochmals zum Beispiel des Pendels zurück. Unter den getroffenen Vereinfachungen wie z.B. Reibungsfreiheit bleibt die Energie des Pendels längs der Lösungen der Pendelgleichung konstant. Die Energie ist dabei eine Funktion des aktuellen Auslenkungswinkels x des Pendels und der aktuellen Winkelgeschwindigkeit, d.h. der Änderung des Auslenkungswinkels pro Zeiteinheit, die wir mit y bezeichnen wollen. Trägt man die Energie als Funktion von x und y über der (x,y)-Ebene auf, so erhält man eine über dieser Ebene liegende Fläche, die man sich wie ein Gebirge mit Bergen und Tälern vostellen sollte. Interessant sind nun die Niveaulinien der Energie, also die Linien in der (x,y)-Ebene, längs deren die Energie konstant ist. In unserem anschaulichen Bild sind dies die Höhenlinien des Energiegebirges, vgl. Abb. 9.
Da die Energie längs der Bewegungen des Pendels konstant bleibt, geben uns diese Energieniveaulinien ein vollständiges Bild aller mög-

Abb. 9: Die Energieniveaulinien eines Pendels



lichen solchen Bewegungen. Der Punkt x=0, y=0 entspricht dem stationären Zustand Z_1. Wenn wir das Pendel einmal ganz um die Achse drehen, erhalten wir natürlich wieder den alten Zustand, was die Periodizität des Bildes in x-Richtung erklärt. Der Punkt x=π, y=0 (oder x=-π, y=0) entspricht dem stationären Zustand Z_2.
Lenkt man das Pendel durch eine kleine Störung aus dem Zustand Z_1 aus, so landet man auf einer der geschlossenen Niveaulinien, die diesen Zustand umkreisen, das Pendel führt also eine Schwingung mit kleiner Amplitude und kleiner Winkelgeschwindigkeit aus; der Zustand ist stabil. Demgegenüber führt jede noch so kleine Störung des Zustands Z_2 dazu, dass sich das Pendel sehr weit von diesem Zustand entfernt und nun entweder mit sehr großer Amplitude hin und her schwingt oder überschlägt und um die Achse rotiert. Stellt man sich das zu den Höhenlinien gehörige Energiegebirge vor, so sieht man, dass Z_1 der tiefste Punkt in einem Tal ist, ein Energieminimum, während Z_2 einen Sattel darstellt. Bei einem (physikalischen oder mathematischen, dynamischen) System mit Energieerhaltung sind Energieminima in der Regel stabil, Sattelpunkte instabil.

Auch für die oben erwähnten Galaxienmodelle *NGM* und *RGM* ist die Energie eine Erhaltungsgröße. Allerdings reicht hier die Kenntnis der Energie keineswegs aus, um mögliche zeitliche Entwicklungen einer Galaxie im wesentlichen zu erfassen, denn zwischen dem mathematischen Modell eines Pendels und den mathematischen Modellen *NGM* oder *RGM* einer Galaxie gibt es einen prinzipiellen Unterschied. Der aktuelle Zustand eines Pendels ist durch zwei Zahlen, nämlich die Werte von x und y, vollständig beschrieben. Kennt man diese Werte zu einem bestimmten Zeitpunkt, so kann man das gesamte zukünftige Verhalten des Pendels daraus vorhersagen; man sagt, das Pendel ist ein zweidimensionales dynamisches System. Demgegenüber stellen die Galaxienmodelle in einem präzisen Sinn unendlichdimensionale dynamische Systeme dar.

Trotzdem ist es in den letzten Jahren gelungen, mathematische Stabilitätsaussagen für stationäre Zustände zumindest des nichtrelativistischen Modells *NGM* zu beweisen, die Ideen dabei sind mit den obigen Überlegungen für das Pendel verwandt. Man findet auch dann noch stabile stationäre Zustände, wenn man als nichtrelativistische Approximation für ein schwarzes Loch im Zentrum der Galaxie eine Punktmasse vorgibt, die die Sterne der Galaxie zum Zentrum hinzieht. Im Fall des relativistischen Modells *RGM* ist die mathematische Analyse noch nicht so weit fortgeschritten, aber man kann die Stabilitätsfrage zumindest durch numerische Simulation des Modells am Computer untersuchen.

Eine Klarstellung: In einer numerischen Simulation simuliert man nicht etwa eine Galaxie oder sonst irgendein reales System, sondern man berechnet näherungsweise die Lösungen des mathematischen Modells für das physikalische System. Computer ersetzen keine Mathematik(er), sondern sie brauchen deren Input.

In der numerischen Simulation von *RGM* findet man neben stabilen stationären Zuständen auch instabile, bei denen eine kleine Störung zu einem Gravitationskollaps führt. Alle bisherigen numerischen Rechnungen weisen dabei darauf hin, dass im Rahmen des relativistischen Modells *RGM* die Hypothese vom kosmischen Zensor gilt und jede in einem Gravitationskollaps entstehende Singularität hinter einem Ereignishorizont verborgen ist. Erst in jüngster Zeit konnte dies für eine Klasse von Anfangskonfigurationen auch mathematisch bewiesen werden.

Es gibt in diesem Umfeld noch sehr viele spannende, offene mathematische Fragen, die ich mit meiner Arbeitsgruppe an der Universität Bayreuth und mit Kollegen aus dem In- und Ausland weiter untersuche.

Von Einsteins Gedankenexperimenten zu GPS

Auf viele interessante Phänomene, die in die Thematik dieses Aufsatzes gepasst hätten wie z.B. der Urknall, dunkle Materie oder dunkle Energie, konnte hier nicht eingegangen werden.
Ich möchte aber zum Schluss noch etwas erzählen, das zu Abb. 10 passt.
Sie zeigt Einstein in seinem Büro im Patentamt in Bern, wo er in den Jahren 1902–1909 als Patentprüfer arbeitete. Nach der Veröffentlichung seiner speziellen Relativitätstheorie im Jahre 1905 begann er, darüber nachzudenken, wie eine mit den Prinzipien dieser Theorie verträgliche Beschreibung der Gravitation aussehen müsste. Er erkannte bald, dass hierzu eine viel weiterreichende Revision der Begriffe von Raum und Zeit nötig sein würde, als sie jene Theorie bereits enthielt. Eines Tages im Jahr 1907, er hatte während der vergangenen Tage intensiv mit seinem Problem gekämpft, saß er an seinem Büroschreibtisch, als ihm plötzlich der Gedanke kam: Wenn man in einem Aufzug, bei dem das Seil gerissen ist, frei nach unten fällt, spürt man sein eigenes Gewicht nicht. Anders und genauer gesagt: Wenn man in einem geschlossenen Kasten sitzt, der z.B. im Gravitationsfeld der Erde frei fällt, liefern physikalische Experimente in diesem Kasten genau die gleichen Resultate, wie wenn der Kasten weit weg von allen Planeten und Sternen in der Schwerelosigkeit des Weltalls schwebt; bitte beachten Sie: Solche Gedankenexperimente sind nicht zum Nachmachen, sondern zum Nach-Denken gedacht.

Abb. 10: Albert Einstein

Obiges Gedankenexperiment führte Einstein zur Formulierung seines sogenannten Äquivalenzprinzips, und obwohl es noch Jahre dauerte, bis er daraus und aus anderen grundlegenden Prinzipien die allgemeine Relativitätstheorie entwickelte, leitete er innerhalb weniger Tage eine revolutionär klingende Folgerung ab: In einem Gravitationsfeld laufen Uhren (und alle anderen physikalischen Prozesse, also die Zeit selbst) langsamer als ohne Gravitation, und je stärker das Gravitationsfeld ist, desto mehr ist der Lauf einer Uhr verlangsamt. Eine Uhr auf der Erdoberfläche läuft langsamer als eine identisch konstruierte Uhr, die sich in großer Höhe befindet, wo das Schwerefeld der Erde schwächer ist. In Zeiten von Exzellenzclustern und (möglichst anwendungsorientierter) Großforschung ist es beeindruckend zu sehen, wie hier aus gründlichem Nachdenken über ein einfaches Phänomen, nämlich die Verhältnisse in einem frei fallenden Aufzug, eine Revolution unseres physikalischen Weltbildes wird. Und diese ist durchaus anwendungsrelevant:
In den Satelliten, die als wesentliche Komponenten des unter dem Kürzel GPS bekannten Navigationssystems in großer Höhe die Erde umkreisen, befinden sich u.a. sehr genau gehende Uhren. Würde man bei der notwendigen Synchronisation dieser Uhren mit Uhren auf der Erdoberfläche den genannten relativistischen Effekt (und andere relativistische Effekte, u.a. bedingt durch die Relativbewegungen der Uhren untereinander) nicht berücksichtigen, so würden sich die resultierenden Ungenauigkeiten des Systems innerhalb relativ kurzer Zeiträume so aufaddieren, dass die Positionsangaben der GPS-Geräte ungenau bis unbrauchbar würden. Die allgemeine Relativitätstheorie zeigt sich aber noch an anderer und sehr grundlegender Stelle bei GPS. Die Zahl der Satelliten ist so gewählt, dass möglichst von jedem Punkt der Erdoberfläche aus gesehen immer mindestens vier Satelliten über dem Horizont stehen, also ihr Signal im Prinzip empfangbar ist. Warum gerade vier? Weil GPS tatsächlich nicht unsere Position in einem dreidimensionalen, vor-relativistischen Raum bestimmt, sondern in der vierdimensionalen Raumzeit. Und um die entsprechenden vier Raumzeit-Koordinaten bestimmen zu können, braucht man eben vier Gleichungen, also Signale von vier Satelliten.

Wir sind auch im Bereich unseres Alltags in der vierdimensionalen Raumzeit angekommen und finden uns dort, dank Mathematik und Physik, zurecht. ■

Bildnachweise: Die Abbildungen 5 und 6 stammen von der Homepage des Hubble Space Telescope http://hubblesite.org/newscenter/ Abbildung 7 stammt von der Homepage der ESO http://www.eso.org/public/.

Lösung zum Rätsel auf Seite 5

8	4	5	7	6	1	2	3	9
9	6	7	8	3	2	5	4	1
2	3	1	5	4	9	6	7	8
1	2	8	9	7	3	4	6	5
6	5	3	2	8	4	1	9	7
7	9	4	1	5	6	3	8	2
5	1	6	4	9	7	8	2	3
3	7	2	6	1	8	9	5	4
4	8	9	3	2	5	7	1	6

Der Zufall: Gegenspieler

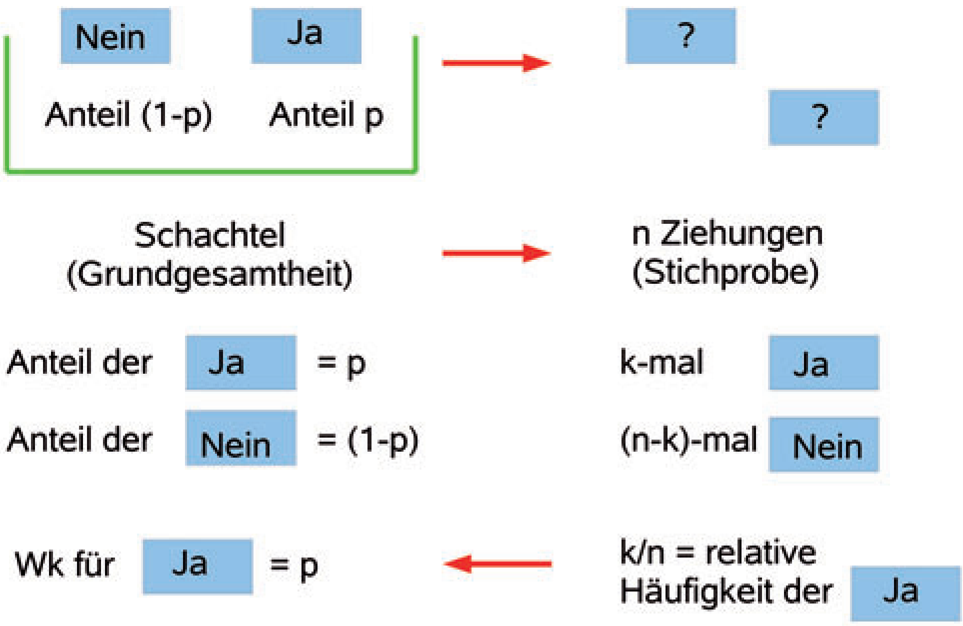
Prof. Dr.
Walter Olbricht

Nehmen Sie regelmäßig Rauschgift? Auf eine solche Frage wird man kaum ein ernstes 'Ja' erwarten dürfen. Trotzdem ist die Forschung natürlich an entsprechenden Daten interessiert. Statistiker haben deshalb einen kleinen Trick ersonnen, der Befragten ganz unbefangene und ehrliche Antworten erlaubt. Die Hauptidee besteht überraschenderweise darin, noch zusätzlich Zufall ins Spiel zu bringen. Der Zufall wird geradezu zum Helfer des Statistikers, während er sonst ja meist als sein Gegenspieler auftaucht, der Messergebnisse mit Fehlern behaftet oder Prognosen 'unsicher' macht. Das wollen wir mit einigen Beispielen erläutern, und nebenbei etwas Appetit auf mehr Statistik machen.

Ausgangspunkt

Die (zu Unrecht natürlich!) als trocken geltende Statistik schmackhaft machen – kann das überhaupt gelingen? Packen wir den Stier bei den Hörnern, und fangen wir mit unzweifelhaft Schmackhaftem an: Denken wir an Schokolade oder genauer an eine große Tüte mit Schokolinsen in verschiedenen Farben. Wir ziehen zufällig 10 Schokolinsen – natürlich ohne Zurücklegen – heraus. Darunter befinden sich 2 gelbe. Dann kann man den Anteil der gelben Schokolinsen in naiver Weise hochrechnen. Man erwartet nämlich, dass 2/10 = 20 % der Schokolinsen in der Tüte gelb sind. Die Genauigkeit dieser Schätzung lässt sich in einem solchen Fall schnell überprüfen, indem wir noch einige weitere Stichproben ziehen. Allerdings zeigt diese Überprüfung auch, dass unsere Schätzungen stark schwanken können: Bei einer anderen Stichprobe von 14 Schokolinsen werden vielleicht 4 gelbe entdeckt. Oder bei einer Stichprobe von 20 nur eine gelbe. Hier „stört" uns offenbar der Zufall beim Ziehen der Schokolinsen doch erheblich. Zum Glück fällt es nach Erfahrung des Autors beim Schokolinsenproblem leicht, genügend viele Helfer zu rekrutieren, die bei der empirischen Überprüfung zulangen und jeweils eine Stichprobe auszählen, so dass man am Ende eine Totalerhebung durchgeführt hat. (Da wir immer ohne Zurücklegen ziehen, müssen die gezogenen Schokolinsen natürlich anschließend gegessen werden, sonst sinkt die Mithilfebereitschaft deutlich.) Trotzdem kann es bei kleineren Zuhörerzahlen oder großen Tüten leicht zu Bauchschmerzen kommen. Dann schon lieber etwas nachdenken (und vielleicht ein paar Kopfschmerzen riskieren). Das ist sowieso besser, denn manchmal hat man es ja gar nicht mit leckeren Schokolinsen zu tun, sondern mit anderen Dingen. Ein Beispiel ist das sogenannte Politbarometer im ZDF. Dort werden keine Schokolinsen als Stichprobe gezogen, sondern Bundesbürger und diese werden auch nicht auf eine Farbe untersucht, sondern nach ihrer Meinung zu einem aktuellen Thema befragt. Beispielsweise: Sind Sie für eine Überarbeitung der Hartz IV-Gesetze? Die Antwort kann dann 'Ja' oder 'Nein' lauten, und die entspre-

Darstellung 1: Modell zum Ziehen einer Zufallsstichprobe



Walter Olbricht

und Helfer in der Statistik

chenden Prozentzahlen werden im Wesentlichen wie oben auf die Bevölkerung übertragen. Hier ist natürlich eine Totalerhebung ganz und gar undurchführbar. (Allein schon wegen der großen Zahl und nicht, weil Bundesbürger ungenießbar sind. Aber auch hier stellen sich die Fragen: Wie genau ist ein solcher hochgerechneter Prozentsatz? Wie stark kann er zufallsbedingt schwanken? Wie viele Bundesbürger sollte man befragen, um einigermaßen verlässliche Resultate zu bekommen?)
Damit sind wir schon mitten in der Thematik. Am besten bildet man nun aus mathematischer Sicht ein einfaches Modell, das die wesentlichen Charakteristika der Problemstellung abbildet und ansonsten auf vielfältige Situationen anwendbar ist. Ein solches Modell ist in Darstellung 1 dargestellt.
Man stellt sich dabei vor, dass in einer großen Schachtel Zettel der Typen $\boxed{\text{Ja}}$ und $\boxed{\text{Nein}}$ (also mit den Aufschriften 'Ja' und 'Nein') enthalten sind, wobei der Anteil der Zettel des Typs $\boxed{\text{Ja}}$ gerade p beträgt. Der Anteil der Zettel des Typs $\boxed{\text{Nein}}$ beträgt dann $1-p$. Aus dieser Schachtel (Grundgesamtheit) wird n-mal mit Zurücklegen gezogen. Zeigt sich in dieser Stichprobe vom Umfang n etwa k-mal das Resultat $\boxed{\text{Ja}}$ (und dementsprechend $(n-k)$-mal das Resultat $\boxed{\text{Nein}}$), so ist die relative Häufigkeit k/n offenbar eine naheliegende Schätzung für den Anteil p der Zettel des Typs $\boxed{\text{Ja}}$ oder auch für die Wahrscheinlichkeit ('Wk'), einen solchen Zettel zu ziehen.

Mathematischer Hintergrund

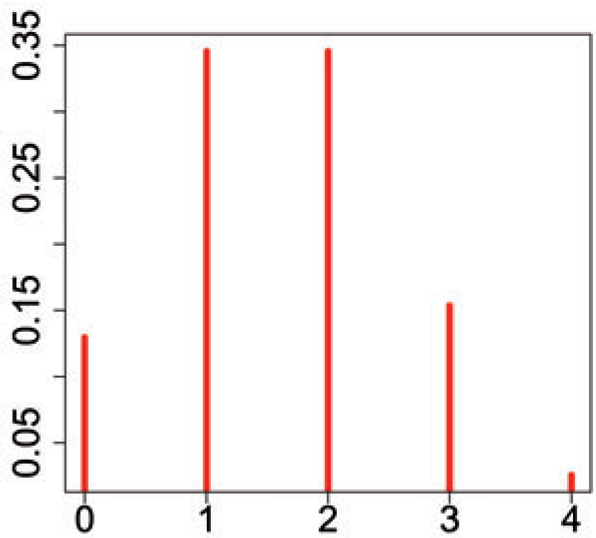
Das in Darstellung 1 angegebene Modell lässt sich nun präzise untersuchen. Das wollen wir in diesem Abschnitt tun. Aber keine Angst, es bleibt alles ganz elementar. Wer darauf trotzdem keine Lust hat, kann jedoch problemlos direkt zum nächsten Abschnitt (Eine konkrete Anwendung) springen, wenn er bereit ist, dem Autor einige Aussagen ohne Belege und weitere Erläuterungen abzunehmen.
Schreibt man X für die Anzahl der $\boxed{\text{Ja}}$ in der Stichprobe, so ist dies eine vom Zufall abhängige Größe. Allerdings hat man diese Zufallsabhängigkeit mathematisch gut im Griff. Man kann sich nämlich leicht überlegen, mit welcher Wahrscheinlichkeit X irgendeinen Wert k (der ja zwischen 0 und n liegen muss) annehmen wird. Es ist mit der Abkürzung 'Wk' für Wahrscheinlichkeit:

$$\mathrm{Wk}(X=k)$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Das ist eine sogenannte Binomialverteilung mit den Parametern n und p. Für $n = 4$ und $p = 0.4$ ist sie zum Beispiel in Darstellung 2 angegeben:

k	Wk(X=k)
0	0.1296
1	0.3456
2	0.3456
3	0.1536
4	0.0256

Wenn wir also viermal (mit Zurücklegen) aus einer Schachtel ziehen, in der vier Zettel des Typs $\boxed{\text{Ja}}$ und sechs Zettel des Typs $\boxed{\text{Nein}}$ enthalten sind, so werden wir mit Wahrscheinlichkeit 15.36% dreimal $\boxed{\text{Ja}}$ und einmal $\boxed{\text{Nein}}$ erhalten. Beruhigenderweise sind aber die Werte 1 und 2 viel wahrscheinlicher. Das ist deswegen beruhigend, weil wir ja auf lange Sicht 40% $\boxed{\text{Ja}}$ Zettel erwarten würden, also eigentlich $0.4 \cdot 4 = 1.6$. In der Tat stellt man fest, dass die mit den Parametern n und p binomialverteilte Größe X um den Wert np schwankt. Man kann (in einem bestimmten unten noch genauer betrachteten Sinne) sogar die Größe der 'Schwankung' berechnen und erhält dafür $\sqrt{np(1-p)}$.
Wenn wir also X/n als Schätzung für p benutzen, so schwankt diese Größe zufallsbedingt zwar um den richtigen Wert p, aber leider mit einer 'Schwankung' des Ausmaßes $\sqrt{p(1-p)/n}$.



Darstellung 2: Binomialverteilung mit n = 4 und p = 0.4

Der Zufall: Gegenspieler und Helfer in der Statistik

Ein leicht nachvollziehbares Zahlenbeispiel liefert für $n = 100$ und $p = 0.1$ etwa die 'Schwankung'

$$\sqrt{p(1-p)/n} = \sqrt{0.1 \cdot (1-0.1)/100} = 0.03 \quad .$$

Dies bedeutet: Etwa 70% der Stichproben liefern Werte um 0.1 ± 0.03. Die 'Schwankung' kann man nämlich so interpretieren, dass für geeignete Werte von n und p ungefähr 70% der Werte von X/n nicht weiter als einmal den Betrag der 'Schwankung' vom Zielwert p entfernt liegen.

Allerdings müssen wir uns noch mit zwei Einwänden befassen, bevor wir das Modell tatsächlich sinnvoll nutzen können. Erstens ist es ein Problem, dass wir ja gerade p nicht kennen und daher die 'Schwankung' eigentlich gar nicht berechnen können. Diesem Einwand kann man begegnen, indem man einfach mit dem ungünstigsten Fall rechnet. Man sieht leicht, dass die 'Schwankung' für den Fall $p = 0.5$ am größten ist. Zweitens zieht man in der Realität in der Regel ohne Zurücklegen. Man sieht aber wiederum leicht, dass unser Modell dafür eine gute Annäherung ist, wenn man nur einen kleinen Teil der Grundgesamtheit als Stichprobe zieht. Dann macht es offenbar ja fast keinen Unterschied, ob mit oder ohne Zurücklegen gezogen wird. Es ist auch möglich, aber meist überflüssig, hierfür einen exakten Korrekturfaktor einzubauen.

Eine konkrete Anwendung

Betrachten wir noch ein realitätsnahes Beispiel: Es werden 2500 zufällig ausgewählte Bundesbürger befragt und es ergibt sich 1000-mal die Antwort $\boxed{\text{Ja}}$. Der geschätzte Prozentsatz für $\boxed{\text{Ja}}$ ist dann 1000/2500 = 40% und die 'Schwankung' ist höchstens $\sqrt{0.5 \cdot (1-0.5)/2500} = 1\%$. Der geschätzte Anteil ist also 40% ± 1%. Der Zufall stört kaum noch. Das ist der Grund, warum in vielen Umfragen (z. B. auch beim ZDF Politbarometer) Stichprobengrößen von 1000 - 2500 gewählt werden. Überraschenderweise hängt die Genauigkeit ('Schwankung') gar nicht von der Größe der Grundgesamtheit (also der Schachtel) ab, sondern nur von der Größe der Stichprobe. Aber auch das ist nur auf den ersten Blick überraschend: Beim Ziehen mit Zurücklegen spielt ja die Schachtelgröße keine Rolle. Auch intuitiv ist das nichts Neues: Bei einer Blutprobe würde man auch nicht erwarten, dass der Arzt die abgenommene Blutmenge nach dem Körpergewicht des Patienten bemisst.

Falls der Leser Appetit nicht nur auf Schokolinsen und Alkohol hat: Mehr zu diesem Thema findet man in dem sehr schönen Buch von Freedman et al. (2007).

Indiskrete Fragen und der Schutz der Befragten

Im Rahmen unserer mathematischen Analyse haben sich die Zufallsschwankungen als durchaus beherrschbar erwiesen. Ein viel schwierigeres Problem aber könnten systematische Verzerrungen sein, wie sie etwa bei indiskreten Fragen zu erwarten sind. Auf Fragen wie

a) Haben Sie schon einmal Crystal genommen?
b) Haben Sie schon einmal einen Ladendiebstahl begangen?
c) Hatten Sie im letzten Monat mehr als drei Sexualpartner?

wird man mit einer Verzerrung durch unehrliche Antworten (durch Verschweigen oder Wichtigtuerei) rechnen müssen. Das ist nicht nur ein Problem von Vertrauenswürdigkeit. Denn abgesehen davon, dass auch die Zusicherung von Vertraulichkeit nicht jedem Wissenschaftler (nicht einmal jedem Statistiker!) abgenommen wird, kann man absolute Vertraulichkeit eigentlich gar nicht mehr garantieren: Daten werden in der Regel auf Computern abgespeichert. Es ist nur zu bekannt, dass hierauf Software verschiedenster Sorte Zugriff nehmen könnte. Aber auch die Rechtslage könnte sich ändern und eine Herausgabe der Daten verlangen. Englische Universitäten weisen zum Beispiel Gutachter schon standardmäßig darauf hin, dass die Universität „unter gewissen Umständen" gezwungen sein könnte, Gutachten den begutachteten Bewerbern zugänglich zu machen. Jeder Leser kann sich vorstellen, wie gefährlich in totalitären oder fundamentalistischen Staaten Daten (z. B. über politische Betätigung oder Abtreibungen) für den Befragten sein oder sogar erst werden können. Der 'Befragtenschutz' wird von daher (leider) immer mehr auch zum Problem der Statistiker und fast zum Teil seiner Sorgfaltspflicht. Was kann man tun? Es gilt wieder, die Situation ganz präzise zu analysieren. Dann stellt man fest, dass man für die hier verfolgten statistischen Zwecke eben nur wissen muss, *welcher Anteil* einer Population eine bestimmte Eigenschaft A besitzt, aber nicht *wer*. Dies bietet die Möglichkeit, eine individuelle Zuordung einer Antwort gänzlich unmöglich zu machen – und zwar nicht nur durch eine Art Urne (die manipuliert sein könnte), sondern für den einzelnen Befragten nachvollziehbar. Es gibt dazu sogar verschiedene Möglichkeiten, von denen im Folgenden zwei vorgestellt werden sollen. Dabei wollen wir vor ein paar einfachen Formeln nicht zurückschrecken, um den Leser als Versuchssubjekt dafür zu nutzen, inwieweit Befragten diese Verfahren einsichtig gemacht werden können. Statistiker können es halt einfach nicht lassen...

Frage und Gegenfrage

Eine erste Methode geht auf Warner (1965) zurück. Sie lässt sich kurz so beschreiben:

Die Zahl θ zwischen 0 und 1 sei bekannt. Der Befragte wählt selbst durch einen unparteiischen Zufallsmechanismus, auf welche Frage er antwortet, und zwar

mit Wahrscheinlichkeit θ auf die Frage (F1): Haben Sie Eigenschaft A?

mit Wahrscheinlichkeit $(1-\theta)$ auf die Frage (F2): Haben Sie Eigenschaft A nicht?

Ein konkretes Beispiel mit $\theta = 4/6 = 2/3$ könnte so aussehen:

Werfen Sie einen Würfel.
Falls 1, 2, 3 oder 4 erscheint, antworten Sie auf (F1).
Falls 5 oder 6 erscheint, antworten Sie auf (F2).

Nun weiß nur der einzelne Befragte, was sein $\boxed{\text{Ja}}$ oder $\boxed{\text{Nein}}$ bedeutet, und es ist auch unmöglich, dies im nachhinein festzustellen. Aber man kann immer noch den Anteil p der $\boxed{\text{Ja}}$ -Antworten auf (F1) in der Grundgesamtheit schätzen, denn mit der Abkürzung "Wk" für "Wahrscheinlichkeit" hat man:

$$\begin{aligned}\mathrm{Wk}(\boxed{\text{Ja}}) &= \theta p + (1-\theta)(1-p) \\ &= \theta p + 1 - p - \theta + \theta p \\ &= (2\theta - 1)p + (1-\theta)\,.\end{aligned}$$

Somit ist:

$$p = \frac{\mathrm{Wk}(\boxed{\text{Ja}}) - (1-\theta)}{2\theta - 1}\,.$$

Wenn von n Befragten X mit $\boxed{\text{Ja}}$ antworten, kann man wieder die Wahrscheinlichkeit durch die relative Häufigkeit schätzen und erhält:

$$p = \frac{(X/n) - (1-\theta)}{2\theta - 1}\,.$$

Beispiel: $\theta = 2/3$, $n = 600$ Befragte, 250-mal $\boxed{\text{Ja}}$.
Der geschätzte Prozentsatz mit Eigenschaft A ist dann:

$$p = \frac{250/600 - 1/3}{1/3} = 1/4 = 25\%\,.$$

Einige Spezialfälle sollen noch gesondert kommentiert werden:

- Ist $\theta = 1$, so wird stets die Frage (F1) beantwortet. Folgerichtig liefert unsere Schätzung dann $p = (X/n)$.
- Ist $\theta = 0$, so wird stets die Frage (F2) beantwortet. Folgerichtig liefert unsere Schätzung dann $p = 1 - (X/n)$.
- Ist $\theta = 1/2$, so ist unabhängig von p die Wahrscheinlichkeit für $\boxed{\text{Ja}}$ gleich 1/2. Folgerichtig ist unsere Schätzung für p dann nicht definiert.

Unverbindliche Frage

Eine zweite Methode wurde von Horvitz et al. (1967) vorgeschlagen.

Sie lässt sich kurz so beschreiben: Die Zahl θ zwischen 0 und 1 sei bekannt. Der Befragte wählt selbst durch einen unparteiischen Zufallsmechanismus, auf welche Frage er antwortet, und zwar

mit Wahrscheinlichkeit θ auf die Frage (F): Haben Sie Eigenschaft A?

mitWahrscheinlichkeit $(1-\theta)$ auf eine unverbindliche Frage (U): Haben Sie Eigenschaft B (für deren Zutreffen die Wahrscheinlichkeit bekannt ist)?

Ein konkretes Beispiel mit $\theta = 1/2$ könnte so aussehen:

Werfen Sie eine Münze.
Falls 'Kopf' erscheint, antworten Sie auf (F).
Falls 'Zahl' erscheint, werfen Sie die Münze erneut und antworten Sie auf die Frage, ob beim zweiten Wurf 'Kopf' kam. (Die unverbindliche Frage (U) ist also, ob beim zweiten Wurf 'Kopf' kam.)

Wieder weiß nur der einzelne Befragte, was sein letztliches $\boxed{\text{Ja}}$ oder $\boxed{\text{Nein}}$ bedeutet.
Aber auch hier kann man wieder den Anteil p der $\boxed{\text{Ja}}$ -Antworten auf (F) in der Grundgesamtheit schätzen, denn falls q die Wahrscheinlichkeit für ein $\boxed{\text{Ja}}$ auf Frage (U) bezeichnet, so hat man:

$$\mathrm{Wk}(\boxed{\text{Ja}}) = \theta p + (1-\theta) q\,.$$

Somit ist

$$p = \frac{\mathrm{Wk}(\boxed{\text{Ja}}) - (1-\theta)q}{\theta}\,.$$

Wenn von n Befragten X mit $\boxed{\text{Ja}}$ antworten, kann man wieder die Wahrscheinlichkeit durch die relative Häufigkeit schätzen und erhält diesmal:

$$p = \frac{(X/n) - (1-\theta)q}{\theta}\,.$$

Beispiel: $\theta = 1/2$, $q = 1/2$, $n = 600$ Befragte, 250-mal $\boxed{\text{Ja}}$.

Der geschätzte Prozentsatz mit Eigenschaft A ist dann:

$$p = \frac{250/600 - 1/4}{1/2} = 1/3 = 33.33\%\,.$$

Auch diesmal gibt es wieder einige Spezialfälle:

- Ist $\theta = 1$, so wird stets die Frage (F) beantwortet. Folgerichtig liefert unsere Schätzung dann $p = (X/n)$.
- Ist $\theta = 0$, so ist unabhängig von p die Wahrscheinlichkeit für $\boxed{\text{Ja}}$ gleich q. Folgerichtig ist unsere Schätzung für p dann nicht definiert.
- Ist $\theta = 1/2$, so ergibt sich $p = 2(X/n) - q$.

Vergleich der Methoden

Alle Methoden liefern im Mittel die richtige Antwort. Für die 'Schwankungen' kann man ausrechnen:

direkte Frage ($\theta = 1$):

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,.$$

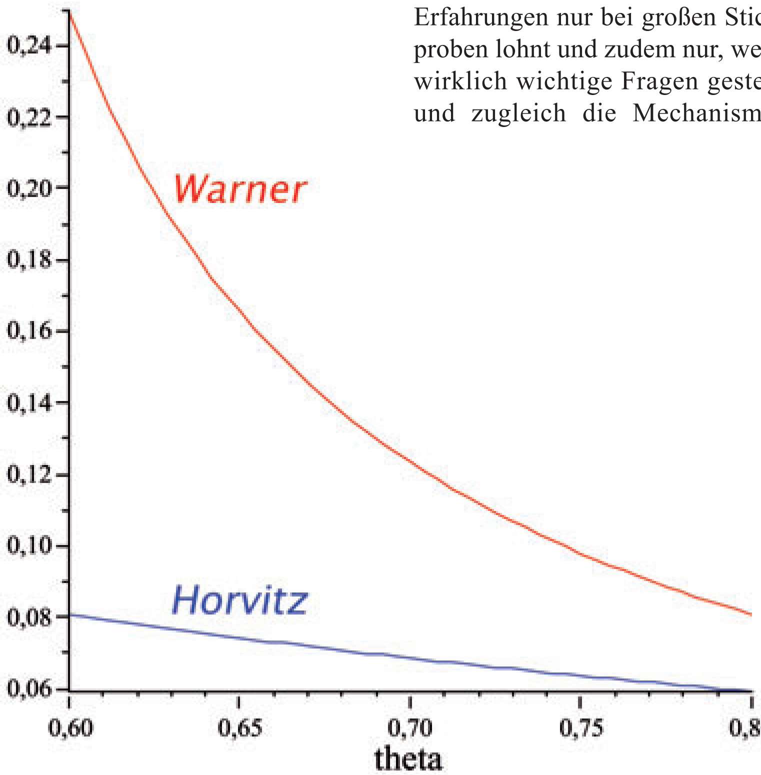
Frage und Gegenfrage (Warner):

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n} + \frac{\theta(1-\theta)}{n(2\theta-1)^2}}\,.$$

unverbindliche Frage (Horvitz et al.):

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n} + \frac{(1-\theta)^2 q(1-q) + \theta(1-\theta)(p(1-q)+q(1-p))}{n\theta^2}}$$

Man erkennt schon an diesen Formeln, dass die Schwankung bei den zufallsverrauschten Fragestellungen nach Warner und nach Horvitz et al. größer ist als bei der direkten Fragestellung. Das ist auch zu erwarten, da ja bewusst zusätzliche Unsicherheit hineingetragen wird. Allerdings hofft man, dass der Gewinn durch ehrlichere Antworten diesen Nachteil mehr als ausgleicht. Eine allgemeine Aussage über die Ansätze von Warner und Horvitz et al. ist schwierig. Die folgende Graphik zeigt die Schwankungen für $n = 100$, $p = 0.3$, $q = 0.5$ in Abhängigkeit von θ aus [0.6, 0.8]:



Darstellung 3: Vergleich der „Schwankungen“

Fazit

Mit Hilfe recht einfacher mathematischer Modelle kann man den Zufall bei Stichprobenziehungen recht leicht in den Griff bekommen. Stichprobengrößen von 1000 - 3000 werden für die meisten Genauigkeitsansprüche bereits ausreichen. Der Zufall ist also gar kein so gefährlicher Gegenspieler für den Statistiker, wie manchmal vermutet wird. Wesentlich schwieriger ist das Problem unehrlicher Antworten bei indiskreten Fragen. Hier wandelt sich der Zufall interessanterweise vom Gegenspieler zum Helfer des Statistikers. Allerdings soll auch nicht verschwiegen werden, dass sich der Einsatz randomisierter Methoden wie der von Warner und Horvitz et al. nach den bisherigen Erfahrungen nur bei großen Stichproben lohnt und zudem nur, wenn wirklich wichtige Fragen gestellt und zugleich die Mechanismen genau erklärt werden. Sonst könnten Befragte zu der Ansicht gelangen, ihre Antworten seien ganz egal, da ja ohnehin randomisiert würde. Das wäre natürlich nicht im Sinne der Erfinder. Es kann allerdings sein, dass die heute so fremdartig anmutenden randomisierten Befragungen schon bald aus Gründen des Befragtenschutzes als natürlich empfunden werden und damit auch von Seiten der Befragten besser gehandhabt werden. (Ähnlich wie heute niemand mehr über Passwörter und PIN-Nummern lächelt.) Als einen Schritt in diese Richtung habe ich versucht, die Verfahren nicht nur zu beschreiben, sondern mit den wesentlichen Formeln nachvollziehbar darzulegen. Ist das gelungen? Antworten von Lesern wären sehr willkommen. Unrandomisiert und trotzdem ganz ehrlich... ■

Literatur

Freedman, D./Pisani, R./Purves, R. (2007): Statistics, 4th edition, New York (W. W. Norton).

Horvitz, D. G./Shah, B. V./Simmons, W. R. (1967): The Unrelated Question Randomized Response Model, Proceedings of the Social Statistics Section, American Statistical Association, **71**, 65–72.

Warner, S. L. (1965): Randomized response: A survey technique for eliminating evasive answer bias, Journal of the American Statistical Association, **60**, 63–69.

Priska Jahnke

Kryptographie – Das Hüten von Geheimnissen

Lassen Sie mich mit einer kleinen Anekdote beginnen. Alle Rechner unserer Arbeitsgruppe sind durch ein kleines Netzwerk verbunden, sodass alle relevanten Daten wie Passwörter oder die eigenen Dateien nur auf einem einzigen Rechner (dem „Server") liegen, alle anderen (die „Clients") holen sie über das Netz. Kurz vor Weihnachten hat nun der Server langsam, aber sicher seinen Dienst quittiert und musste dringend durch einen neuen Rechner ersetzt werden. Unser Systemadministrator konnte alle Daten von dem alten auf den neuen Rechner retten, und dieser lief einwandfrei. Zuletzt mussten nun alle Clients an den neuen Server angebunden werden. Und jetzt ging auf einmal nichts mehr. Mein alter Rechner kannte mein Passwort nicht mehr, fand meine Daten nicht. Wir standen vor einem Rätsel.
Die Lösung war einfach: Mein Rechner benutzte ein altes, inzwischen nicht mehr sicheres Verschlüsselungssystem („DES"), während der neue Server natürlich ein neues, zurzeit sicheres verwendet („Blowfish"). Wenn ich mein Passwort also eingab, verschlüsselte mein Rechner dieses via DES und verglich das Ergebnis mit meinem via Blowfish verschlüsselten Passwort, das vom Server über das Netz kam. Das konnte nicht gutgehen...
Nach Umstellung meines alten Rechners auf Blowfish lief alles wie am Schnürchen.

Was ist Kryptographie?

Das Wort *Kryptographie* leitet sich aus dem Griechischen von *kryptós* (=verborgen) und *gráphein* (=schreiben) her, ist also die Lehre von den Geheimschriften. Bereits Cäsar verwendete wohl eine heute nach ihm benannte Chiffre, um vertrauliche Botschaften mit seinen Legaten auszutauschen: Jeder Buchstabe des Alphabets wird um eine feste Anzahl Stellen verschoben. So wird aus APFEL bei der Verschiebung um 2 Stellen CRHGN. Die meisten heutigen Verfahren verwenden zahlentheoretische Methoden („Public-Key"), immer mehr ins Blickfeld rücken jedoch auch algebraisch-geometrische Systeme basierend auf elliptischen Kurven („ECC = Elliptic Curve Cryptography").
Ziel ist stets eine möglichst sichere Verschlüsselung von Texten oder anderen Daten – auf einem immer breiter werdenden Anwendungsgebiet. Kryptographische Verfahren wurden von privater Seite sicher schon immer in (Liebes?)-briefen oder geheimen Tagebüchern verwendet. So schickte zum Beispiel Marie-Antoinette (1755-1793) verschlüsselte Botschaften an den schwedischen Staatsmann Hans Axel von Fersen – unter anderem um ihre Flucht aus dem revolutionären Frankreich zu planen. Von staatlicher Seite wurden Kryptosysteme natürlich vor allem für Militär und Geheimdienste entwickelt. Heute haben sie Einzug in den Alltag gehalten: Man denke an sichere Datenübertragung über das Internet, die Verschlüsselung der eigenen PIN-Nummer auf der EC-Karte oder persönlicher Daten auf dem Chip der Krankenversicherungskarte.
Die Ansprüche an die verwendeten Kryptosysteme haben sich damit grundlegend geändert. Konnten Marie-Antoinette und von Fersen sich noch zuvor heimlich auf einen gemeinsamen Schlüssel einigen, so kennen sich Käufer und Verkäufer eines Internetgeschäftes heute im allgemeinen nicht einmal.
Nehmen wir im folgenden an, Sie möchten ein Buch oder eine CD bei einer Versandfirma X online bestellen und mit Kreditkarte bezahlen. Wie können Sie Ihre Kreditkartennummer so über das Internet schikken, dass ein potenzieller Mitleser mit den Daten nichts anfangen kann, die Firma X aber schon?

PD Dr. Priska Jahnke

Symmetrische Verfahren

Man unterscheidet generell zwei Typen kryptographischer Systeme: symmetrische wie DES, Blowfish oder die berühmte Enigma aus dem zweiten Weltkrieg, und asymmetrische, sogenannte Public-Key-Verfahren wie RSA oder ECC. Beide Typen sind aus dem heutigen Datenverkehr nicht mehr wegzudenken.
Der Vorteil von symmetrischen Verfahren: Sie sind schnell. Auch große Datenmengen können in kurzer Zeit ver- und entschlüsselt werden. Voraussetzung ist allerdings, dass sich Sender und Empfänger vor der Datenübertragung auf einen gemeinsamen Schlüssel einigen (z.B. die Anfangsrotorstellung bei der Enigma, oder die Anzahl der Stellen, um die

Kryptographie – Das Hüten von Geheimnissen

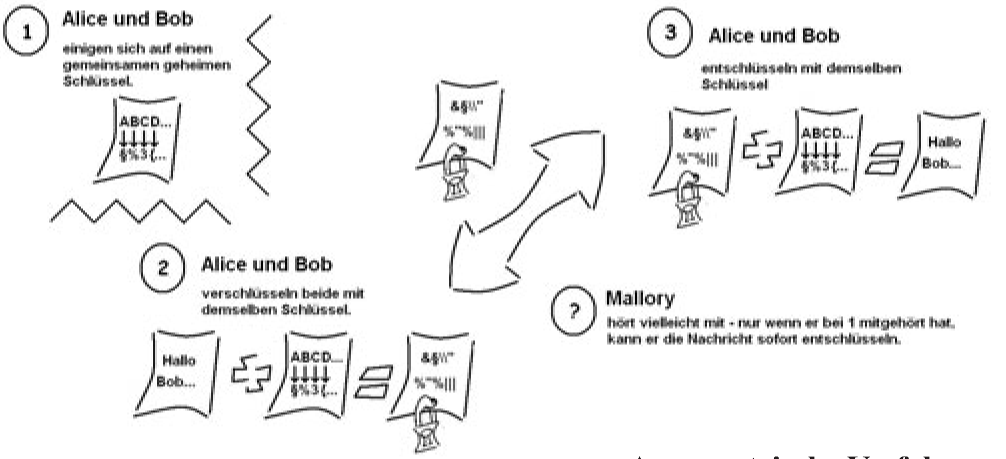


Abbildung 1: Symmetrische Verschlüsselung

die Buchstaben bei Cäsar verschoben werden). Dieser wird sowohl zum Ver- als auch zum Entschlüsseln verwendet (Abb. 1).
Auch die eingangs genannten Systeme DES und Blowfish sind symmetrische Verfahren. *DES* ist die Abkürzung für „Data Encryption Standard“, das System wurde 1975 von der Firma IBM in Zusammenarbeit mit der mit der US-amerikanischen National Security Agency (NSA) entwickelt, um ein standardisiertes Verschlüsselungssystem für das im Entstehen begriffene Internet zu schaffen – wobei es natürlich jede Menge Spekulationen über die Rolle der NSA an der Entwicklung des DES gibt. DES hat eine feste Schlüssellänge von 56 Bit, und genau hier liegt heutzutage seine Schwachstelle. Eine Möglichkeit, den DES zu knacken, hat man bisher nicht gefunden, aber moderne Großrechner sind in der Lage, alle möglichen 256 Schlüssel in praktikabler Zeit durchzuprobieren (Brute-Force-Attacke, vgl. letzter Abschnitt). Erstmals gelang dies 1997 vom Projekt „DESCHALL“ durch Vernetzung von mehreren tausend PCs. Seit dieser Zeit gilt der DES nicht mehr als sicher, und es werden neue Verfahren mit längeren Schlüsseln als 56 Bit entwickelt – wie eben Blowfish oder AES (= „Advanced Encryption Standard“).

Asymmetrische Verfahren (Public-Key)

Eignet sich ein symmetrisches Verfahren für Ihre Online-Bestellung? Sie müssten sich zunächst mit der Versandfirma auf einen gemeinsamen geheimen Schlüssel einigen. Diesen über das Internet zu verschicken scheint wenig ratsam – jeder, der den Schlüssel abhört, kann Ihre im Anschluss gesendete Kreditkartennummer genauso lesen wie Firma X. Müssen Sie also zu der Firma hinfahren, um den Schlüssel auszutauschen? Da Sie Ihr bestelltes Buch dann gleich mitnehmen könnten scheint dies wenig sinnvoll...
Ein symmetrisches Verfahren bietet sich dennoch aufgrund der Schnelligkeit an. Für den zuvor erfolgenden Schlüsselaustausch muss offenbar eine andere Methode gefunden werden. Diese Lücke schliessen Public-Key-Verfahren mit sogenannten Schlüsselaustauch-Protokollen. Public-Key (= „öffentlicher Schlüssel“), bedeutet, dass Firma X auf Anfrage einen ersten öffentlichen Schlüssel sendet, der zum Verschlüsseln einer an sie gerichteten Nachricht ausreicht. Zum Entschlüsseln benötigt die Firma einen zweiten geheimen Schlüssel. Liest also jemand den öffentlichen Schlüssel mit, so kann er damit noch lange nicht die von uns damit verschlüsselten anschließend gesendeten Daten entziffern (Abb. 2).
Benutzt werden sogenannte Einweg- oder Falltürfunktionen, das sind Funktionen, die in einer Richtung relativ einfach zu berechnen sind, deren Umkehrfunktionen aber nur mit Hilfe eines zusätzlichen Parameters berechenbar sind (nämlich des geheimen Schlüssels des Empfängers).
Der Nachteil von Public-Key-Verfahren: Sie sind rechenaufwendig und daher langsam. Sie werden daher meist nur zum Schlüsselaustausch für ein symmetrisches Verfahren verwendet, zur digitalen Signatur oder zur Übertragung kleiner Datenmengen wie PIN-Nummern oder Passwörter. Der Vorteil: Nur Firma X kann die verschlüsselten Informationen wieder entschlüsseln. Sie sparen sich also die Fahrt.

RSA

Das vielleicht bekannteste Public-Key-Verfahren ist der RSA, benannt nach seinen Erfindern Ronald L. Rivest, Adi Shamir und Leonard Adleman (1977). Er basiert auf einem einfachen Prinzip:

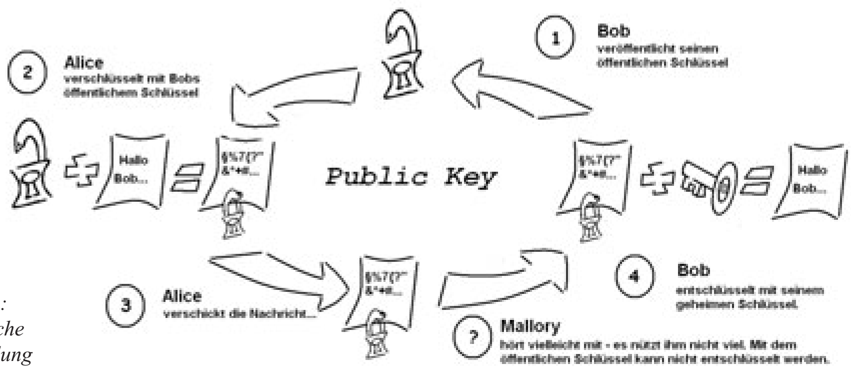


Abbildung 2: Asymmetrische Verschlüsselung

Große Zahlen zu multiplizieren ist für einen Computer einfach, sie (in Primzahlen) zu faktorisieren ist sehr schwer.

Ein Beispiel:
Sind die Primzahlen 67 und 83 gegeben, so kann jeder Taschenrechner innerhalb von Millisekunden das Ergebnis $67 \cdot 83 = 5561$ berechnen. Ist umgekehrt ein Produkt $122539 = p \cdot q$ gegeben, so gibt es bisher kein praktikables Verfahren, um p und q zu bestimmen („praktikabel" heißt ausreichend schnell).

Etwas Mathematik:
Wir schreiben $a \equiv b \mod n$, falls a der Rest beim Teilen von b durch n ist. Also z.B. $3 \equiv 10 \mod 7$ oder $2 \equiv 20 \mod 6$. Nehmen wir nun also wieder an, Sie wollen Ihre Kreditkartennummer N der Firma X übermitteln und benutzen RSA. Dann gehen Sie und X (bzw. Ihre jeweiligen Computer) nach dem in Abb. 2 beschriebenen Schema wie folgt vor:

1) X wählt zwei große (verschiedene) Primzahlen p und q, berechnet $n = p \cdot q$ und wählt die Zahl e, so dass es ein d gibt mit $1 \equiv d \cdot e \mod (p-1) \cdot (q-1)$. Dabei braucht e nicht groß zu sein.
2) X veröffentlicht n und e, hält p, q und d geheim.
3) Sie berechnen $Ch(N) \equiv N^e \mod n$ und verschicken die verschlüsselte Kreditkartennummer Ch(N).
4) X entschlüsselt durch $N \equiv Ch(N)^d \mod n$ und erhält so die ursprüngliche Zahl N zurück.

Dahinter steckt der Satz von Euler, d.h. $Ch(N)^d \equiv (N^e)^d \equiv N^{d \cdot e} \equiv N \mod n$ (denn $\varphi(p \cdot q) = (p-1)(q-1)$).

Fazit: Die Firma X berechnet N mit d zurück. Diese Zahl kann nur ausrechnen, wer p und q kennt. Die Sicherheit des Verfahrens beruht also darauf, dass es bisher keine schnelle Möglichkeit gibt, n in Primfaktoren zu zerlegen. Andererseits hat der Algorithmus „Teilen mit Rest" eine sehr schnelle Laufzeit, genauso wie die Multiplikation bzw. das Potenzieren von Zahlen. Trotzdem ist RSA im Vergleich zu symmetrischen Verfahren wie DES sehr langsam und wird daher nicht zum eigentlichen Datenaustausch verwendet.

Elliptische Kurven

Elliptische Kurven sind spezielle algebraische Kurven, das sind Nullstellenmengen von Polynomen in einem n-dimensionalen Raum, z.B. in $\mathbf{R}^n$ bzw. dem projektiven Raum $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$. [1]
Ist die Kurve Nullstellenmenge eines Polynoms dritten Grades, so spricht man von einer elliptischen Kurve (vgl. Abb. 3). Charakteristischerweise besteht das reelle Bild einer elliptischen Kurve aus zwei Komponenten: dem „Ei" und dem unbeschränkten Teil der Kurve. In der Kryptographie verwendet man elliptische Kurven, da es auf ihnen eine Gruppenstruktur gibt, d.h. man kann zwei Punkte einer elliptischen Kurve addieren und erhält einen neuen Punkt der Kurve. [2]
Sei also E eine elliptische Kurve und P, Q zwei Punkte auf E. Dann trifft die Verbindungsgerade $\overline{PQ}$ die Kurve E in genau einem weiteren Punkt S (nach dem Satz von Bezout). Spiegelung an der x-Achse liefert den Punkt R, den wir als Summe $R = P + Q$ definieren.
Auf ähnliche Weise verdoppelt man einen gegebenen Punkt P auf E: Die Tangente an E im Punkt P trifft die Kurve E in genau einem weiteren Punkt S. Spiegelung an der x-Achse liefert $R = 2P$.

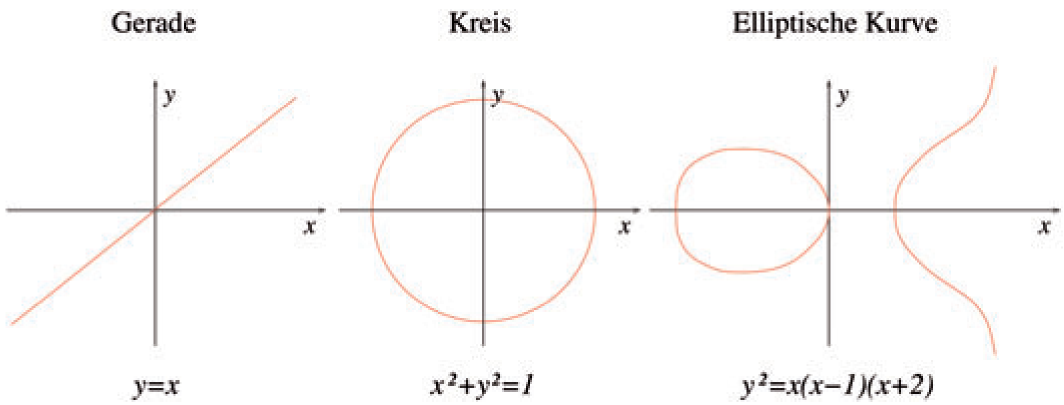


Abbildung 3: Reelle Kurven

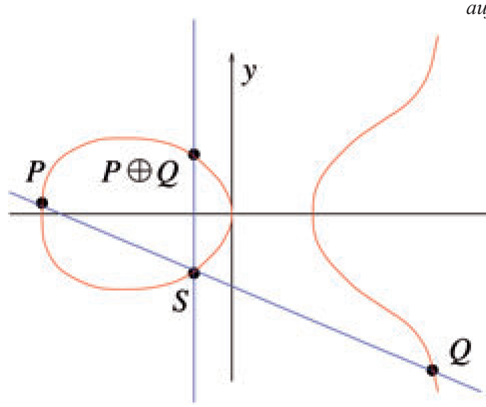


Abbildung 4: Das Gruppengesetz auf elliptischen Kurven I

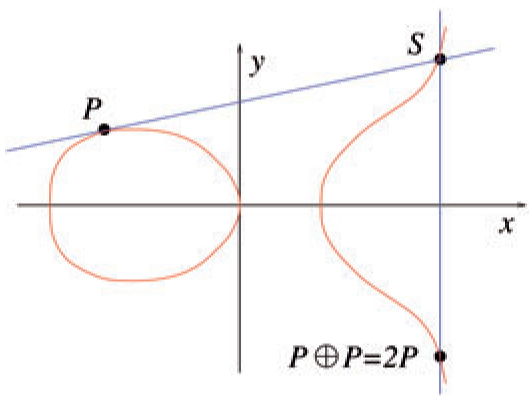


Abbildung 5: Das Gruppengesetz auf elliptischen Kurvem II

[1] *In der Kryptographie werden elliptische Kurven über endlichen Körpern $\mathbf{F}_p$ betrachtet bzw. deren projektive Abschlüsse in $\mathbf{P}_n(\mathbf{F}_p)$.)*

[2] *Wir nehmen stets an, dass die Kurve in Weierstraß-Normalform vorliegt, d.h. insbesondere, dass es nur genau einen unendlich fernen Punkt O gibt. Wir definieren O als neutrales Element der Gruppe.*

Kryptographie – Das Hüten von Geheimnissen

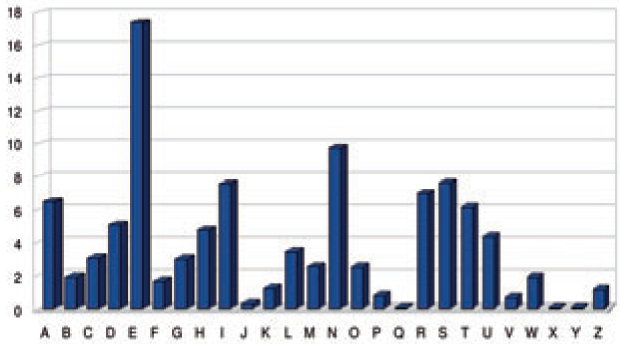


Abbildung 6: Häufigkeitsanalyse eines deutschen Textes

Elliptische-Kurven-Kryptosysteme (ECC)

Elliptische Kurven in der Kryptographie zu verwenden ist relativ neu, es gibt verschiedene Einsatzmöglichkeiten. Wir wollen hier ihre Rolle beim Schlüsselaustausch vorstellen. Das zugrundeliegende Protokoll stammt von Whitfield Diffie und Martin Hellman [3]. Der Schlüsselaustausch soll es Sender und Empfänger ermöglichen, sich öffentlich (also völlig unverschlüsselt über das Internet) auf einen gemeinsamen geheimen Schlüssel zu einigen, der dann als Anfangswert für ein symmetrisches Verfahren dient. Die Grundidee ist

Es ist leicht, Punkte auf einer elliptischen Kurve zu addieren, aber sehr schwer, aus nP die Vielfachheit n zurückzuberechnen („Diskretes-Logarithmus-Problem“).

Nehmen wir wieder in unserem Beispiel an, Sie wollen etwas bei der Firma X bestellen. Wir gehen folgendermaßen vor:

1) Sie und X einigen sich auf eine elliptische Kurve E und einen Startpunkt P auf E, dies ist der öffentliche Schlüssel.
2) Sie wählen eine geheime Zahl a, X eine geheime Zahl b.
3) Sie senden $K_a = aP$, X sendet $K_b=bP$.
4) Sie berechnen $K=aK_b$ und X berechnet $K=bK_a$.

Beide erhalten denselben Punkt $K = aK_b = abP = baP = bK_a$. Das Verfahren ist sicher, da es keinen Algorithmus gibt, der aus aP oder bP die Werte a bzw. b oder den Schlüssel K = abP berechnet. Der Vorteil des ECC gegenüber RSA ist die geringe Schlüssellänge: ECC kommt heute mit 160 Bit aus, während man bei gleicher Sicherheit 1024 Bit für andere asymmetrische Verfahren benötigt. Daher eignet sich ECC immer dann, wenn Platz gespart werden muss, wie z.B. auf Smartcards (EC-Karten, Handykarten, etc.).

Attacken

Unter einer „Attacke“ versteht man den Versuch, ein Verschlüsselungssystem ohne Kenntnis des entsprechenden Schlüssels zu knacken, die *Kryptanalyse* beschäftigt sich mit solchen Verfahren. Die einfachste Attacke ist ein systematisches Probieren aller möglichen Schlüssel, die sogenannte *Brute-Force-Attacke* (= „Attacke mittels roher Gewalt“). Ihre Effektivität hängt von der vorhandenen Rechenkapazität und der Anzahl der möglichen Schlüssel ab. Bei der Cäsarchiffre zum Beispiel gibt es nur 26 Schlüssel, hier kommt man relativ schnell zum Ziel.
Ein weiteres klassisches Verfahren ist die *Häufigkeitsanalyse*. Hier wird in einem abgefangenen (möglichst längeren) verschlüsselten Text die Häufigkeit gezählt, mit der jeder Buchstabe (oder jedes Zeichen) vorkommt und dies mit der entsprechenden Statistik irgendeines in Klartext abgefassten Schriftstücks verglichen (vgl. Abb. 6).
Auch dieses Verfahren knackt die Cäsarchiffre: In der deutschen Sprache ist das „E“ mit Abstand der häufigste Buchstabe. In unserem Beispiel würde man die Identifikation E → C finden, und könnte daraus bereits den Schlüssel k = 2 (die Verschiebung um 2 Stellen) ablesen. Natürlich lässt sich das Knacken mittels Häufigkeitsanalyse leicht verhindern. Am einfachsten führt man ein „Alphabet“ mit mehr als 26 Zeichen ein, wobei dem „E“ gleich mehrere verschiedene Zeichen zugeordnet werden.
Für eine sinnvolle Attacke des RSA benötigt man gute Faktorisierungsalgorithmen. Schon länger bekannt ist hier das Zahlkörpersieb oder Pollards (p-1)-Methode. Andere Verfahren wie Lenstras Algorithmus benutzen wiederum elliptische Kurven (vgl. den Artikel von Lenstra oder das Buch von Silverman und Tate für eine gute Einführung). Bei Elliptische-Kurven-Kryptosystemen ist Vorsicht bei der Wahl der Kurven angebracht, nicht jede elliptische Kurve ist geeignet. Unter anderem bei sogenannten supersingulären elliptischen Kurven gibt es eine Hintertür – hier kann man mittels Weil-Paarung die Gruppe der Kurve in die multiplikative Gruppe eines endlichen Körpers sehr kleiner Ordnung abbilden; in dieser lässt sich nun erheblich leichter rechnen (vgl. Menezes et al.). ■

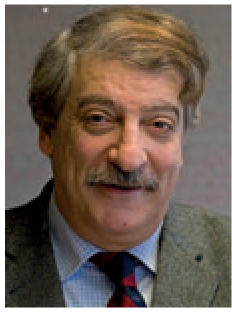
Literatur

H.W. Lenstra: *Factoring integers with elliptic curves*, Annals of Mathematics 126, 649-673 (1987)
N. Koblitz: *Algebraic Aspects of Cryptography*, Springer 1998.
A.J. Menezes, T. Okamoto, S. A. Vanstone: *Reducing Elliptic Curve Logarithms to Logarithms in a Finite Field*, IEEE Transactions on Information Theory 39, 1639-1646 (1993).
K. Schmeh: *Kryptografie und Public-Key-Infrastrukturen im Internet*, dpunkt.verlag GmbH Heidelberg 2001.
J. Silverman, J. Tate: *Rational points on elliptic curves*, Springer 1992.

[3] Entsprechende Protokolle zur Datenübertragung wie mittels RSA gehen auf Taher ElGamal zurück. Diffie-Hellman und ElGamal wurden in den 70er bzw. 80er Jahren für beliebige endliche Gruppen entwickelt; ursprünglich wurde die multiplikative Gruppe eines endlichen Körpers verwendet.

Fabrizio Catanese
übersetzt und überarbeitet von Ingrid Bauer

Mathematik: Wissenschaft, Spiel oder Kunst?



Prof. Dr. Fabrizio Catanese und Prof. Dr. Ingrid Bauer

Dieser Artikel nimmt die Herausforderung an, die Stellung der Mathematik in der heutigen Gesellschaft zu diskutieren. Dieses Thema liegt mir besonders am Herzen und damit stehe ich nicht allein da, denn zum Beispiel hat das mathematische Forschungszentrum Ennio De Giorgi der Scuola Normale Superiore di Pisa als ihr Motto gewählt: ***„Why should anybody but mathematicians care about the standing of mathematics in the world?"***

Andererseits entwickeln und verändern sich sowohl Gesellschaft wie auch Mathematik heute mit enormer Schnelligkeit, so dass jedwede Diskussion und Frage nach der Zukunft der Wissenschaft nicht von der analogen Frage nach der Entwicklung der Menschheit absehen kann: Moral und Ethik in der Wissenschaft sind zutiefst beeinflusst von der Tendenz der heutigen Gesellschaft, den Wettbewerb jenseits alle vertretbare Grenzen zu treiben. Es stellt sich die Frage, ob dieser internationale und interplanetare Wettkampf trotz allen wissenschaftlichen Fortschritts uns nicht letztendlich in ein „modernes Mittelalter" treibt (welches im Übrigen von einem erstaunlichen technischen Fortschritt bei relativem Stillstand der wissenschaftlichen Entwicklung geprägt war). Auf provozierende oder besser alarmierende Fragen der Art: *„werden die Wissenschaftler die neuen Mönche des neuen Mittelalters oder die neuen Proletarier der modernen Globalisierung sein?"* möchte ich hier jedoch nicht eingehen, wie interessant sie auch sein mögen.

Ein Kollege aus England (Miles Reid) zitiert zu Beginn einer seiner Veröffentlichungen zu Recht aus „The taming of the shrew" von William Shakespeare: *„No profit grows when there is no pleasure taken".*

Dieses Vergnügen entsteht natürlich aus der Genugtuung, eine neue Erkenntnis gewonnen zu haben, etwas zu verstehen, aber es ist auch untrennbar verbunden mit der Fähigkeit zu spielen, mit unserem Gefühl für die Schönheit und das Künstlerische.

Die Hauptmotivation für diesen Artikel ist die folgende: die Mathematik ist Hauptbestandteil der Kultur der gesamten Menschheit, ja wie schon Galileo treffend in den „Dialoghi" bemerkt: *„Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben".*

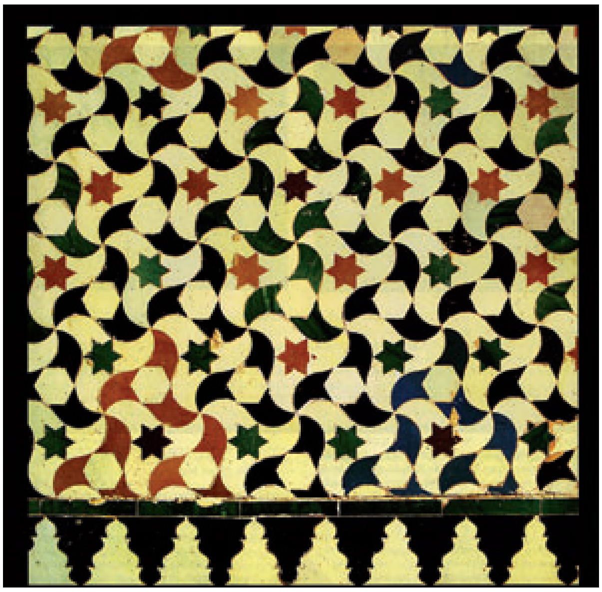
Heutzutage ist die Mathematik ein enormes Werk, ein kollektives intellektuelles Unternehmen, im Gegensatz zu individuellem Streben nach Erkenntnis. Das Bauwerk Mathematik, in keinster Weise weniger komplex als die ganze heutige Gesellschaft, benötigt die vielfältigsten Kompetenzen und intellektuellen Ressourcen, die von künstlerischen Feinheiten bis hin zu reiner kreativer Genialität reichen, wie auch wichtige organisatorische Strukturen, die tiefes und innovatives Gedankengut erfordern.

Aber wie ist es möglich, all diese Energien aufzubringen, wenn man nicht einen angemessenen Lohn dafür bekommt, etwas, was z.B. die Freude am Spiel oder die Genugtuung, sich an Kunst erfreuen zu können, geben kann?

Bei dieser Gelegenheit möchte ich auf die Ausstellung „Matetrentino" verweisen, die von einigen Dozenten des Mathematischen Instituts der Universität Trento organisiert wurde, welche vielfache Verbindungen zwischen Mathematik, Spiel und Kunst wunderschön illustriert.

Figur 1: Die „verknoteten" Säulen des Doms von Trento

Mathematik: Wissenschaft, Spiel oder Kunst?



Figur 2: Ein Mosaik der Alhambra in Granada

Oben genannte Ausstellung führt uns, ausgehend von den verknoteten Säulen der Kathedrale von Trento, die vielfältigen Verbindungen der Mathematik mit der bildenden Kunst vor Augen, wie zum Beispiel:

- die Geometrie der Ornamente in der altgriechischen und islamischen Kunst, sowie in der Renaissance (Kunst ist Mathematik, wenn Sie davon noch nicht überzeugt sind, denken Sie an die Musik und die mathematische Sprache, in der sie geschrieben ist);
- Persönlichkeiten wie Piero della Francesca (Autor einer Abhandlung über Platonische Körper) und Giovan Battista Alberti (Autor einer Abhandlung über Prospektivitäten, die eine zentrale Rolle in der nachfolgenden Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie gespielt hat), welche als Wissenschaftler und als Künstler bekannt sind;
- die spektakuläre Wiedergeburt der Mathematik als Schöpferin einer neuen Kunstrichtung (vgl. die graphischen Darstellungen von Escher der Paradoxa der abstrakten Mathematik, sowie seine wunderbaren Bilder, welche aus den regulären Parkettierungen der hyperbolischen Ebene entstanden sind); (Mathematik ist Kunst);
- die direkte Kommerzialisierung des „Produkts Mathematik“ wie zum Beispiel die faszinierende Schönheit von Fraktalen sowohl von Julia-Fatou Typ, als auch vom Typ Mandelbrot (vgl. z. B. das Buch „The beauty of fractals“ von H. O. Peitgen);
- die ureigene Schönheit der Flächen höherer Ordnung, die in den letzten Jahrhunderten entdeckt wurden.

Einer der größten Defekte, die wir Mathematiker haben, ist unser entschuldigender Ton, den wir anschlagen, wenn wir versuchen zu erklären, dass die Mathematik sowohl schön wie auch sehr nützlich ist. Wir fühlen uns gezwungen, einem Publikum, welches fast schon mit einem gewissen Stolz erklärt, dass es schon in der Schule völlig unfähig war, die einfachsten Rechnungen durchzuführen, zu erklären, was Mathematik ist. Dennoch gelingt dieses nahezu unmögliche Unterfangen einigen Mathematikern, wie zum Beispiel R. Courant in seinem gemeinsam mit Robbins verfasstem Buch „Was ist Mathematik?“.

Keiner lehnt Fußball ab, weil er kein begnadeter Fußballspieler ist oder weil er beim ersten Spiel eine Niederlage einstecken musste. Es ist wohl wahr, dass sich eine große Anzahl Menschen fragen mag, was diese *„22 merkwürdigen Gestalten, die hinter einem Ball her rennen“* eigentlich tun, aber eine sicherlich gleich große Anzahl Menschen ist der Meinung, dass Fußball zu spielen eine Kunst ist, und verbringt (auch wenn selbst nicht oder nicht mehr aktiv in diesem Sport) Stunden um Stunden in heißen Diskussionen über Fußball. Dennoch, versuchen Sie mal einen Fußballfan zu bitten, er solle Ihnen erklären, was Fußball eigentlich ist. Nach dem ersten müden Lächeln über die Tatsache, dass es so etwas doch gar nicht gibt, dass jemand nicht weiß, was Fußball ist, wird er (falls er nicht Mathematiker oder Philosoph ist) sehr schnell in Schwierigkeiten kommen, und das einzig Sinnvolle, was er tun kann, ist, Sie zu einem Fußballspiel (ins Stadion oder vor dem Fernseher) mitzunehmen und Ihnen zu zeigen, was passiert.

Da die Mathematik im Fernsehen praktisch nicht präsent ist, versuchen wir Ihnen hier sozusagen „live“ ein elementares Beispiel für die Mathematik zu geben. Wir werden dazu ein Spiel diskutieren.

Da der Wunsch nach Erfolg schon in früher Kindheit die Haupttriebsfeder ist, ist ein Spiel das ideale Mittel, um bei Kindern die Fähigkeit zu logischer Deduktion zu fördern. Ein Spiel, bei dem man logisch denken muss, ist die beste Übung für unser Gehirn, das (genauso wie unsere Muskeln) regelmäßiges Training braucht.

Figur 4: John Hubbard zeigt, wie Escher das Bild aus einer regulären Parkettierung der hyperbolischen Ebene mit Dreiecken mit Innenwinkeln $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/3$ entwickelt hat

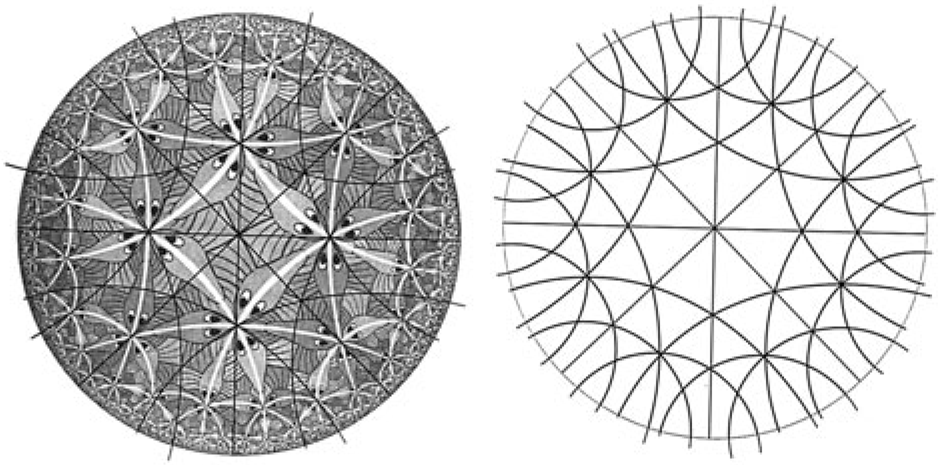
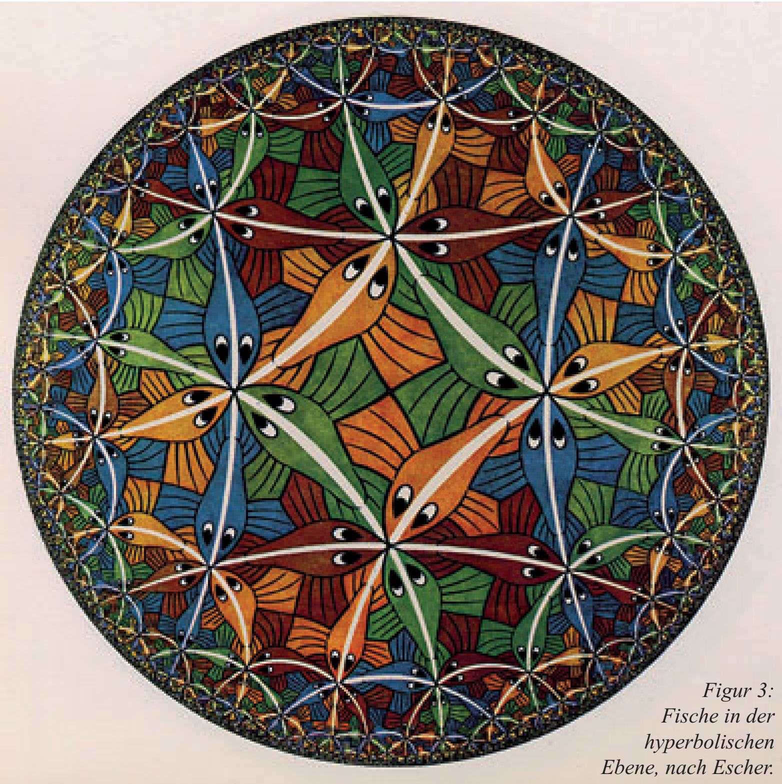


FIGURE 3.9.6 The Escher print and the pattern of triangles giving rise to it. Note that the white lines of the original print are not geodesics.

Das konkrete Beispiel, das ich Ihnen illustrieren werde, ist ein Spiel (in Deutschland wohl ziemlich bekannt unter den Kindern), das meine zwei kleinen Töchter Isabella und Daria (damals 5 und 7 Jahre) im Sommer 2006 begeistert hat.



Figur 3: Fische in der hyperbolischen Ebene, nach Escher.

Es geht so: ich gebe einer zweiten Person 8 Spielkarten und bitte sie, sich eine Karte von diesen zu merken (natürlich ohne sie mir zu verraten). Nun zeige ich dreimal die Karten in zwei Gruppen von 4 Karten und frage jedesmal, in welcher Gruppe die gemerkte Karte ist. Am Ende gebe ich vor, magische Fähigkeiten zu haben (was die Kinder ungleich besser beherrschen als ich) und bin in der Lage, die von meinem Spielpartner gewählte Karte zu zeigen.
Wenn man einen Augenblick darüber nachdenkt, so ist das gar nicht so überraschend: es gibt 8 Karten, nach der ersten Antwort bleiben 4 und wenn ich die anderen 4 Karten einfach weglegen könnte, wäre es sehr einfach: bei der zweiten Antwort meines Partners, könnte ich wieder die Hälfte der Karten, nämlich 2, weglegen und nach der dritten und letzten Antwort würde schließlich nur noch eine Karte übrig bleiben, natürlich die von meinem Spielpartner heimlich gemerkte Karte.

Also, von einem theoretischen Gesichtspunkt ist klar, dass dieses Spiel funktioniert, weil ich drei Fragen habe und $8 = 2 \times 2 \times 2$ Karten. Hätte ich mehr als 8 Karten, würde ich die ausgewählte Karte nicht nach drei Fragen erraten können, denn wenn ich die Anzahl der Karten dreimal durch 2 teile, bleiben mehr als eine Möglichkeit.
Der interessantere Aspekt hier ist jedoch der algorithmische (jedenfalls für neugierige Menschen), denn natürlich werden die durch die jeweiligen Fragen aussortierten Karten nicht einfach weggelegt, sonst wäre der Überraschungseffekt am Ende nicht da. Und das Ziel ist ja, sein Gegenüber zu erstaunen. Das geht so: die Karten sind geordnet und die Frage ist: ist die gewählte Karte unter den ersten 4. Ist die Antwort negativ, so vertauscht man die ersten 4 Karten mit den letzten 4 Karten (wobei aber die relative Reihenfolge der jeweils 4 Karten nicht verändert wird). Dann werden die Karten nacheinander aufgedeckt, eine wird links abgelegt, die nächste rechts und so weiter, so dass man wieder 2 Häufchen Karten hat und eine neue Reihenfolge der Karten. Die Frage ist wieder, in welchem Häufchen die ausgesuchte Karte ist. Nachdem die Frage dreimal gestellt und beantwortet ist, ist die gewählte Karte automatisch die dritte Karte der ersten 4 Karten.
Auch wenn ich mich ablenken lasse und ich nicht nur dreimal, sondern mehrmals mein Gegenüber frage, in welcher Hälfte sich seine Karte befindet, macht das nichts. Einmal an der richtigen Stelle bleibt die Karte an dieser Stelle, egal wie oft ich die Frage stelle.
Bleibt zu klären: warum funktioniert das? Oder wenn Sie noch etwas neugieriger sind: funktioniert ein ähnliches Spiel mit 16, 32 oder 64 Karten? Wie sehen die Regeln dann aus?
Sehen Sie, wenn Sie diese Neugierde besitzen, wenn es Ihnen Spaß macht, darüber nachzudenken, eventuell auszuprobieren, was passiert und nicht lockerlassen, bis Sie eine Antwort finden, dann erfüllen Sie die Grundvoraussetzungen, ein erfolgreicher Mathematiker zu werden (egal, wie erfolgreich oder wenig erfolgreich Ihre Schullaufbahn in der Mathematik war oder ist).
Das Interessante an diesem Problem ist, dass die Methode, die zur Lösung führt, geometrisch ist, während die mathematische Formel, die die allgemeine Lösung für 2^n Karten gibt, eine algebraische ist, welche auf den Binärzahlen beruht. In der Tat ist die allgemeine Lösung durch die Binärzahlen 0, 01, 010, 0101, 01010, usw. gegeben.
Zunächst müssen wir jedoch verstehen, was passiert, wenn wir die 8 Karten nach jeder Antwort neu verteilen. Wir nehmen mal an, dass wir die erste Frage schon gestellt haben

Mathematik: Wissenschaft, Spiel oder Kunst?

und sich somit die gewählte Karte unter den ersten vieren befindet. Nun verteilen wir die 8 Karten auf 2 Häufchen, dabei verändern wir die Reihenfolge der Karten von

1, 2, 3, 4; 5, 6, 7, 8

zu

8, 6, 4, 2; 7, 5, 3, 1 .

Somit befinden sich die „guten" Karten in der zweiten Hälfte der Vierergruppen (4,2 und 3,1). Benutzt man die zweite Antwort des Spielpartners, so verbleiben nur noch zwei gute Karten, nämlich die zwei letzten des ersten Haufens.
Verteilen wir nun wieder wie vorher die 8 Karten auf zwei Häufchen, so sind die zwei „guten" Karten jeweils am dritten Platz der 2 Vierergruppen und die dritte Antwort meines Partners (und das nachfolgende eventuelle Vertauschen der Vierergruppen) bringt die richtige Karte an die dritte Stelle des ersten Häufchens.
Nehmen wir zum Beispiel an, dass sich unser Spielpartner die Karte 3 aussucht. Dann erhalten wir nach den Operationen nach der ersten Frage die Reihenfolge

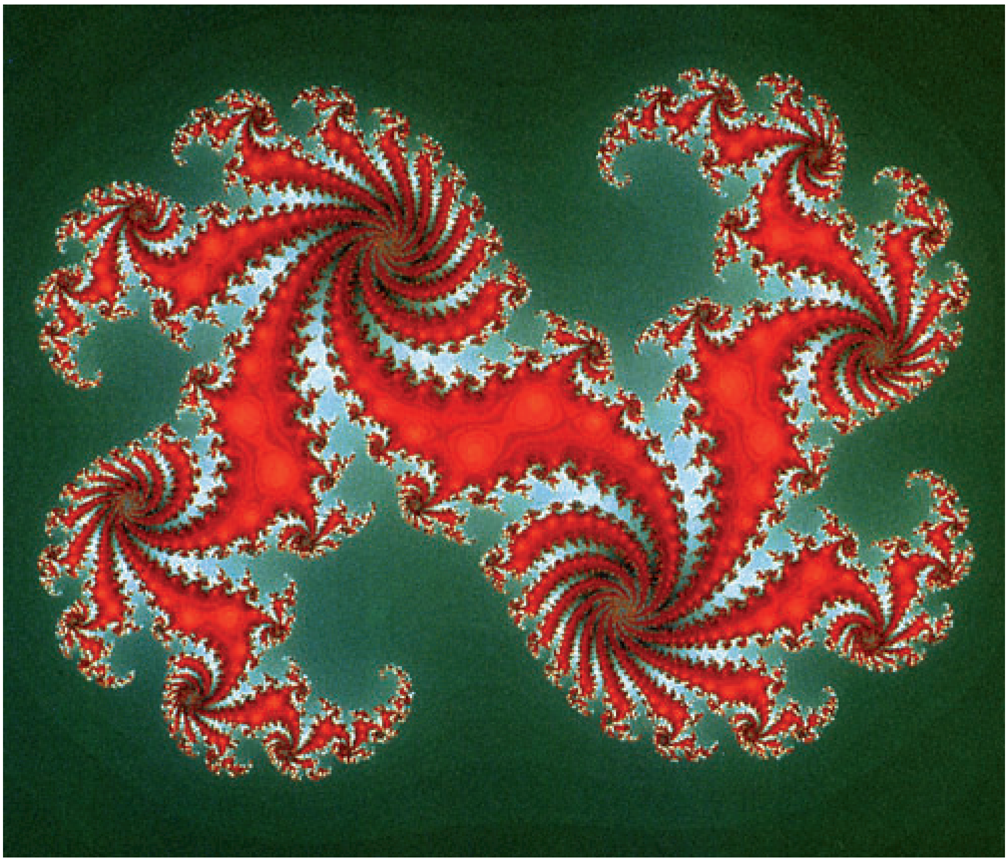
7, 5, 3, 1; 8, 6, 4, 2.

Das zeigt also, ist die ausgewählte Karte einmal an der richtigen Stelle, so bleibt sie auch dort, egal wie oft wir die Frage/Antwort Prozedur wiederholen.
Wenden wir uns nun dem allgemeinen Fall von 2^n Karten zu, so denken wir uns ein Intervall der Länge eins in 2^n gleich lange Intervalle unterteilt.
Nach der ersten Antwort des Spielpartners und der dadurch resultierenden Vertauschung der zwei Häufchen bestehend aus jeweils 2^{n-1} Karten, erreichen wir, dass sich die ausgewählte Karte in der ersten Hälfte des Intervalls befindet. Nach dem Neuausteilen der Karten teilt sich diese Intervallhälfte auf die zwei zweiten Intervallhälften der jeweiligen Intervallhälften auf. Nach einer weiteren Antwort meines Spielpartners und eventueller nachfolgender Permutation der Intervallhälften weiß ich, dass sich die „gute" Karte in der zweiten Hälfte der ersten Intervallhälfte befindet. Nun sieht man leicht, wie es weitergehen muss, d.h. nach der dritten Antwort befindet sich die ausgewählte Karte in der ersten Hälfte der zweiten Hälfte der ersten Hälfte des Intervalls.
Um Verwirrung zu vermeiden, möchten wir jetzt die Intervallpunkte als reelle Zahlen in Binärdarstellung auffassen. D.h., wir sehen die Punkte in der ersten Intervallhälfte als die Punkte, in deren Binärdarstellung die erste Stelle hinter dem Komma eine 0 ist, während die Punkte in der zweiten Intervallhälfte da eine 1 haben. Die Punkte der zweiten Hälfte der ersten Intervallhälfte sind dadurch charakterisiert, dass die ersten zwei Ziffern der Binärdarstellung (nach dem Komma) 01 sind; die Punkte der ersten Hälfte der zweiten Hälfte der ersten Hälfte haben als erste drei Ziffern nach dem Komma (in der Binärdarstellung) 010, und so weiter. Somit kontrahiert der geometrische Prozess die Intervalle immer weiter und konvergiert gegen ein ausgeartetes Intervall, nämlich den Punkt 0,01010101... Nehmen wir nun an, dass wir 2^n Karten haben: dann stoppen wir beim n-ten Schritt, wenn wir das Intervall der Punkte erreicht haben, deren erste n Ziffern nach dem Komma immer abwechseln 0 und 1 sind, d.h. 0,01010101...

Da wir nun die Position der Karte durch eine natürliche Zahl angeben wollen, multiplizieren wir obige Zahl mit 2^n, und wir erhalten die Zahlen (in Binärdarstellung) 0, 01, 010, 0101. In Dezimaldarstellung ergibt (wenn wir noch berücksichtigen, dass 0 hier die Zahl an erster Stelle, also 1 bezeichnet) das für n =1,2,3,4,5.., dass sich die zu erratende Karte an der Stelle 1,2,3,6,11.. befindet.

Das faszinierendste hierbei ist jedoch, dass die Methode, um dieses einfache Spiel zu verstehen eng mit einer von Georg Cantor (Begründer der Mengentheorie gegen Ende des neunzehnten Jahrhunderts) benutzten Methode verwandt ist, um iterativ, aus mehrfachen Unterteilungen (nicht nur zwei) äußerst komplizierte Mengen, sogenannte fraktale Objekte zu konstruieren, die nicht Dimension 0 haben wie Punkte oder Dimension 1 wie Kurven, sondern eine Dimension, die durch eine Zahl dazwischen (z.B. 2/3) gegeben ist. Bekanntlich erhält man die Cantorsche Menge, indem man ein Intervall in drei gleiche Teile teilt und die zwei äußeren (abgeschlossenen) Teilintervalle auswählt und das Verfahren an den erhaltenen Intervallen iteriert. Wie oben hat man auch eine arithmetische Charakterisierung der Cantormenge, nämlich als Menge derjenigen reellen Zahlen im Intervall [0,1], in deren Ternärdarstellung nur die Ziffern 0 und 2 vorkommen.
Das Interesse an fraktalen Objekten liegt in der Tatsache begründet, dass die Natur durch iterative Prozesse funktioniert, man denke zum Beispiel an fallende Wassertropfen, die die wunderbaren Stalaktiten und Stalagmiten in der Teufelshöhle in Pottenstein geschaffen haben. Die Schwierigkeit, die Natur zu verstehen, liegt in der Tat darin, dass unsere Theorien sich im allgemeinen auf endliche Approximationen von unendlichen Prozessen stützen.

Figur 5: Nicht nur Peitgen und Richter sind der Meinung, dass Fraktale von unglaublicher Schönheit sind



Figur 6: Weitere Fraktale

In der Tat führt die Theorie der dynamische Prozesse häufig zu mathematischen „Spielen" und Puzzles, die zu knacken auch für die brillantesten Köpfe unserer Zeit eine echte Herausforderung darstellt. Die Spieltheorie, deren Grundlagen sich zum Beispiel im klassischen Buch von Mackinsey finden, ist nur ein kleiner Zweig der Mathematik, der sich jedoch gerade im letzten Jahrhundert rasant entwickelt hat – auch zu militärischen Zwecken oder zur Optimierung der Ressourcen.

Inzwischen gibt es eine dermaßen große Anzahl von Fachrichtungen in der Mathematik, dass der ehemalige Präsident der Europäischen Mathematikervereinigung, Sir John Kingman, vom „Ozean der Mathematik" spricht. Noch prägnanter drückt es der inzwischen verstorbene Armand Borel in seinem Aufsatz „On the Place of Mathematics in Culture" aus, in dem er die heutige Mathematik als Eisberg bezeichnet, von dem selbst die Mathematiker nur einen sehr kleinen Teil sehen können.

Ein Gedanke jedoch taucht heute immer häufiger auf. In der Vergangenheit brachten die Werkstätten der großen Meister die neuen Künstler hervor (und somit malten Künstler wie Taddeo Gaddi weiter, wie es sie Giotto gelehrt hatte) und auch heute gibt es keine andere Möglichkeit ein Kunsthandwerk zu lernen als einem Meister der Kunst bei seiner Arbeit zuzusehen.

Die großen Schulen der Mathematik des letzten Jahrhunderts waren unglaublich erfolgreich und schier unüberwindliche Schwierigkeiten wurden von Virtuosen der mathematischen Kunst gemeistert.

Um jedoch die für die Zukunft wichtigen Probleme zu individuieren, muss eine ausführliche Diskussion darüber, was wir in der Mathematik für wichtig erachten, stattfinden.

So schreibt Sir Michael Atiyah in seinem Aufsatz „Mathematics: art and science":

„We all know what we like in music, painting or poetry, but it is much harder to explain why we like it. The same is true in mathematics, which is, in part, an art form. We can identify a long list of desirable qualities: beauty, elegance, importance, originality, usefulness, depth, breadth, brevity, simplicity, clarity. However a single work can hardly embody them all; in fact some are mutually incompatible........

Since mathematics is partly art and partly science (corresponding roughly to the traditional pure/applied distinction)........

In fact, I glory the diversity of mathematics....this is what makes it live....

A great cathedral has both structural impressiveness and delicate detail. A great mathematical theory should similarly be beautiful on both large and small scales. „

Klar ist: die Mathematik braucht große Architekten, die die Konstruktion von enormen Gebäuden konzipieren, aber für die Realisierung von solchen Projekten braucht man eine Menge an Wissenschaftlern, die die Fülle an Forschungsarbeit bewältigen, welche nötig ist, um das Gebäude mit Leben zu füllen.

Wie jedoch die Architekten vergangener Zeiten ihre Mäzene benötigten, so brauchen heute die führenden Forscher die Unterstützung ihrer politischen Gesprächspartner. Diesen gegenüber kann sich die Mathematik und die Wissenschaft zu Recht rühmen, in entscheidender Weise zur Steigerung des Lebensstandards beigetragen zu haben. Dabei handelt es sich nicht nur um die direkte Anwendung der Mathematik (man denke an die Entwicklung der Informatik, geboren wie Minerva aus den Köpfen von Turing und von Neumann, man denke an die CDs, die Abhängigkeit unserer Sicherheit von Ver- und Entschlüsselungssystemen...), sondern man kann auch mit René Thom behaupten, dass sich der Fortschritt verschiedener wissenschaftlicher Disziplinen an deren „Grad an Mathematisierung" messen lässt.

Mathematik: Wissenschaft, Spiel oder Kunst?

Dies jedoch reicht nicht aus, wenn man nicht wie Borel die Notwendigkeit der Freiheit der wissenschaftlichen Gemeinschaft, ihre Prioritäten (selbstverständlich nach ausführlicher Diskussion) selbst zu setzen, geltend macht.
Man kommt diesbezüglich nicht umhin, an die folgenden Entwicklungen zu erinnern:

1) Die Theorie der Kegelschnitte, entwickelt von Apollonius in der hellenistischen Periode, ist eine der großen geometrischen Theorien der Antike, aber die erste sehr wichtige Anwendung dieser Theorie fand erst um 1600 statt, als Kepler, einer der Experten der Geometrie, die Planetenmessungen von Tycho Brache studierte und ihm auffiel, dass die Bahnen der Planeten keine Kreise waren, wie die Aristotelische Physik behauptete. Aufgrund seiner Kenntnis der Geometrie machte er die äußerst wichtige Entdeckung, dass die Planetenbahnen in der Tat Ellipsen sind. Somit entstanden aus der Theorie der Kegelschnitte mehr als 1400 Jahre später die drei Keplerschen Gesetze, nämlich:
   a) die Planeten bewegen sich in Ellipsen und die Sonne ist einer der beiden Brennpunkte;
   b) in gleichen Zeiten überstreicht der Fahrstrahl gleiche Flächen;
   c) die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie Kuben der großen Halbachsen.

2) Ebenso führte die Theorie der „intrinsischen" Krümmung einer Fläche (welche von Gauß selbst als sein „theorema egregium" bezeichnet wurde), weiterentwickelt dann von Riemann, Levi Civita und vielen anderen, viele Dekaden später zu Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie. Minkowski hatte den tiefen Zusammenhang zwischen der neu entwickelten Geometrie und dem Verhältnis von Raum und Zeit hervorgehoben, und Einstein, nachdem er Hermann Weyls Vorlesungen in Zürich besucht hatte, bemerkte, dass die Beschreibung der makroskopischen physikalischen Welt schon in der Sprache der Geometrie niedergeschrieben war.

3) Die Zahlentheorie, schon von Gauß als Königin der Mathematik bezeichnet, war bis zu Hilberts und Hardys Epoche, d.h. für über 150 Jahre, eine Disziplin ohne irgendwelche Anwendungen. Eine Gebiet von betörender Schönheit; hat man (laut Kronecker, vgl. Hilbert 1922/23) einmal von ihrem himmlischen Nektar gekostet, wird man nie wieder andere Nahrung zu sich nehmen. Noch vor den erstaunlichen Resultaten von Serre, Frey und Wiles, die zur Lösung der ca. 350 Jahre offenen Fermatschen Vermutung führten, stellte sich heraus, dass die vermeintliche Anwendungslosigkeit der Zahlentheorie eine unglaubliche Fehleinschätzung war: heutzutage sind Entdeckungen der Zahlentheorie zum Beispiel von größtem Interesse für die Geheimdienste aller größeren Nationen.

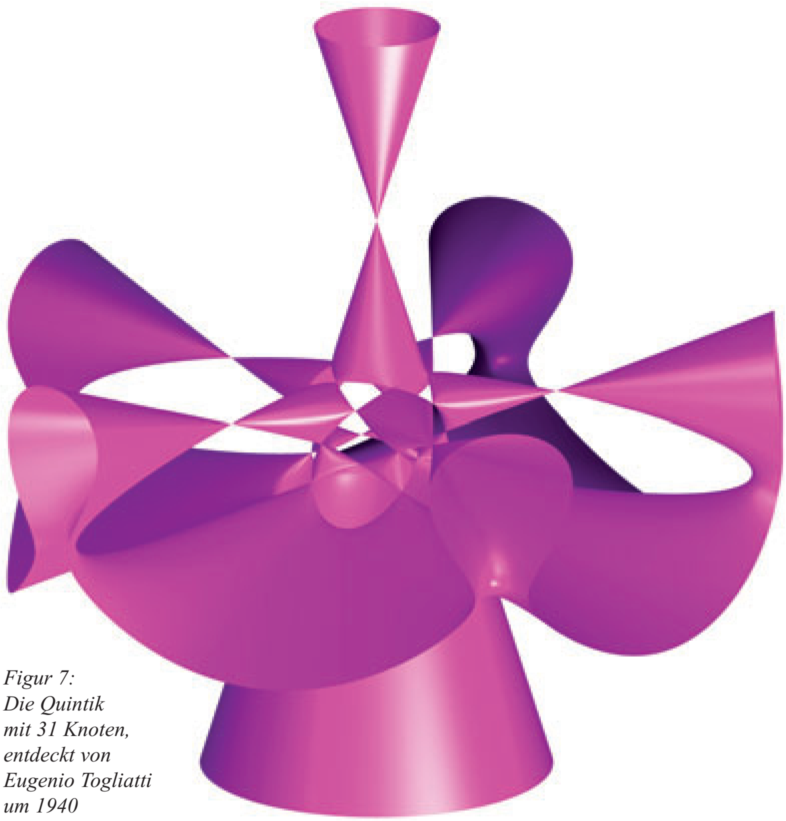
4) Dasselbe gilt für die abstrakte Logik: vom Paradoxon vom Lügner (Wenn jemand sagt: „Ich sage in diesem Moment eine Lüge", lügt er oder sagt er die Wahrheit?) ist man bei der Diskussion der syntaktischen Systeme und beim Lambda Kalkül angekommen, welche heutzutage eine zentrale Rolle in der theoretischen Informatik spielen.

Ich beschränke mich hier auf diese ausgewählten Beispiele: Tatsache ist, dass das Gebäude, welches im Eisberg der Mathematik verborgen ist, äußerst komplex ist, und sich, wie Atiyah bemerkt, viele verschiedene gleich wichtige Aktivitäten darin abspielen.

Wie zum Beispiel die Welt des Films, so hat auch die Mathematik ihre eigene prägnante und präzise Sprache. Die Klarheit spielt eine zentrale Rolle, und die Schönheit und Eleganz der Aussagen sind das Lackmuspapier ihrer Gültigkeit. Auch in der modernen Kunst spielt die Untersuchung von Form und Sprache eine wichtige Rolle.
In der Mathematik jedoch ist diese Sprache ein Hilfsmittel, um individuelle Erkenntnis zum Wissen „aller", zu kollektivem Wissen zu machen. Wenn wir die Metapher des „Eisbergs" umdrehen, so können wir uns die Mathematik als riesigen Turm vorstellen, der immer weiter wächst, und wir möchten natürlich vermeiden, dass er zu einem Babylonischen Turm wird. Zunächst gibt es das Problem, dass wir heute mit Publikationen und wissenschaftlichen Entdeckungen überschwemmt werden (ein ähnliches Phänomen wie die „akustische Verunreinigung" in Großstädten), was in der Mathematik ansatzweise durch einen ausgeklügelten Begutachtungsprozess aufgefangen wird. D.h. jede Arbeit, die in einer mathematischen Zeitschrift erscheinen soll, wird vorher von einem Vertreter des Fachgebiets auf Richtigkeit und Relevanz geprüft.
Natürlich beschränkt sich diese Problematik nicht auf die Mathematik, man vergleiche hierzu W. Benjamin, „Das Kunstwerk im Zeitalter seiner technischen Reproduzierbarkeit", und in der Mathematik ist es sicherlich möglich, eine Collage aus schon bekannten Fragmenten als wissenschaftlichen Artikel zu veröffentlichen.
Ein weiteres Problem, welches in der objektiven Zunahme der Dinge liegt, die ein Mathematiker wissen muss, um auf dem aktuellen Forschungsstand zu sein, wird durch die kontinuierliche Neuausarbeitung und Vereinfachung bekannter Theorien aufgefangen.
Hierbei spielen die Universitäten eine Schlüsselrolle, da dort Wissen geschaffen und vermittelt wird. Der

Unterschied zwischen einer Spezialvorlesung und einem Forschungsseminar besteht meiner Meinung nach einzig darin, dass in ersterer sehr viel mehr Zeit da ist, die Inhalte zu erklären. Es ist allerdings auch wahr, dass in einer Vorlesung die Chronologie der wissenschaftlichen Entwicklungen genau umgedreht wird: hat man einen Spezialfall verstanden, so ist es meist leicht, den Sachverhalt zu verallgemeinern, die Studenten hingegen erfahren zunächst das Ergebnis in möglichst großer Allgemeinheit und eventuell wird danach das Resultat in Spezialfällen diskutiert. In der Tat fragt man sich dabei, ob hier beim Dozenten nicht im Vordergrund steht, die Studenten zu erstaunen, statt ihnen den Weg zur Erkenntnis aufzuzeigen.
In der Mathematik (und hier schließe ich mich Hilbert an) sind die Dinge einfach, und es ist meist unsere Unkenntnis oder Dummheit, die sie kompliziert erscheinen lassen.

Es passiert häufig, dass wir beim Versuch anderen etwas zu erklären – und dabei nach größtmöglicher Einfachheit streben – Verbindungen zwischen scheinbar völlig verschiedenen Fachgebiete entdecken. Dies führt immer wieder zu kritischem Überdenken, was und wie in der Mathematik gelehrt werden soll. Was muss jeder Student wissen? Auf welche Theorien kann kein Mathematiker verzichten? Die Antwort auf diese Fragen ist sicherlich subjektiv und es passiert immer wieder, dass wichtige Theorien, wie zum Beispiel die oben erwähnten Kegelschnitte zunächst zu Übungsaufgaben degradiert werden und schließlich vergessen werden. Manchmal jedoch werden Theorien vergessen, um dann wiederentdeckt zu werden: z.B. gab es in einem IBM Forschungsinstitut einige Forschungsprobleme, welche schon lange gelöst waren und den Weg über Übungsaufgaben „für den interessierten Studenten" ins Vergessen genommen hatten.



Figur 7: Die Quintik mit 31 Knoten, entdeckt von Eugenio Togliatti um 1940

Unzweifelhaft ist jedoch die Entscheidung über die Richtung, welche die Mathematik einschlagen soll, unser größtes Problem. Hierbei spielt natürlich die sogenannte Elite eine zentrale Rolle, was auch immer man darunter verstehen mag, die nationalen Akademien, oder Institute und Universitäten von historischem Prestige (wie zum Beispiel Harvard oder Princeton in den USA, die Scuola Normale Superiore in Italien oder die Ecole Normale in Frankreich....) oder die selbstdeklarierten elitären Gruppen, wie zum Beispiel das Seminaire Bourbaki in Frankreich.
Funktioniert die Mathematik besser als Oligarchie oder als Demokratie? Ich erinnere mich, dass einer meiner akademischen Lehrer, Aldo Andreotti, den Moment fürchtete, in dem die Richtigkeit eines mathematischen Satzes durch Handheben entschieden werden würde.
Andererseits habe ich den Eindruck, dass sich die mathematische Welt, trotz ihres apparenten Respekts für die durch wissenschaftlichen Wert festgelegte Hierarchie, weniger feudalistisch werden muss. Heutzutage brauchen wir ausführliche und weitsichtige Diskussionen und gering ist die Zahl der Geister, die eine ausreichend globale Vorstellung des mathematischen Firmaments haben. Jeder Demokratisierungsprozess ist andererseits eng verknüpft mit dem Thema der „wissenschaftlichen Moralität". Damit meine ich nicht nur die intellektuelle Ehrlichkeit bei der Beurteilung der Wichtigkeit verschiedener Forschungsgebiete, sondern auch, um es in der Sprache des Sports zu sagen, das „fair play" im Konkurrenzkampf und die absolute Unparteilichkeit in den Begutachtungsprozessen.
Diese Thematik stand kürzlich im Zentrum der Aufmerksamkeit, da sie von Grigori Perelmann als Grund für seine Ablehnung der Fields Medaille gegeben wurde, die ihm für den Beweis der dreidimensionalen Poincaré Vermutung angeboten worden war.

Mathematik: Wissenschaft, Spiel oder Kunst?

Fußball begeistert, da er die künstlerische Virtuosität mit der unbewussten (bewussten?) Gemeinschaftlichkeit eines Stammeskriegs vereint: und in der Tat gleicht der Gewinner mehr dem schlauen Odysseus als dem apollinischen Achilles.

Auch die mathematische Gesellschaft ist in gewisser Weise homerisch: die Helden fordern sich zum Zweikampf heraus und das vor einem aufmerksamen Publikum, welches den Erfolg einer neuen Theorie bestätigt oder verwirft. Exemplarisch für diese Sichtweise ist die Geschichte der Mathematik von E.T. Bell und in gewisser Weise das dem Leben und Werk des Mathematikers John Nash Jr. gewidmete Buch von Sylvia Nasar, „A beautiful mind".

Kurz und gut, in der rationalsten aller Wissenschaften trifft Rationalität auf mindestens gleich starke Irrationalität. Diese Irrationalität ist durchaus verständlich, im Grunde schafft die Mathematik mit ihren verschlüsselten Herausforderungen, ihren „Millennium Problems" der Clay Foundation, ja viel früher mit ihren „Problem Solving" Wettbewerben und Mathematikolympiaden eine Atmosphäre sportlichen Wettkampfs, der den persönlichen Einsatz jenseits aller Grenzen stimuliert: und somit gewinnt die Anerkennung seiner Forschungsergebnisse für den einzelnen Mathematiker, der sich an immer schwierigeren Problemen – ähnlich dem Bergsteiger, der alles riskiert, um immer höhere Gipfel zu bezwingen – versucht, eine immense Bedeutung.

André Weil war der Meinung, dass das einzig Wichtige der allgemeine Fortschritt der Mathematik sei. Die Anerkennung der einzelnen Beiträge sei weniger wichtig, höchstens von historischer Bedeutung oder besser ein Teil der Chronik der Disziplin.

Ein einleuchtendes Beispiel dafür ist der Beweis des Uniformisierungssatzes für Riemannsche Flächen, um welchen ein frenetischer über 30 Jahre andauernder Zweikampf zwischen Klein und Poincaré tobte. Letztendlich musste Klein, der König der Mathematik im ausgehenden neunzehnten Jahrhundert, Poincaré das Zepter überlassen, und konnte den Wettstreit nur mit der Hilfe von Hilbert weiterführen. Der Uniformisierungssatz, heute bekannt als Satz von Koebe (und Poincaré), letztendlich 1904 bewiesen, hat eine konzeptionelle Klärung stimuliert, deren Ausführung bis 1963 dauerte, als Ahlfors einen relativ leicht nachvollziehbaren Beweis lieferte. Im Rahmen dieser Entwicklung kamen neue Gesichtspunkte ans Licht (entdeckt von Hamilton), welche schließlich einen Beweis der Poincaréschen Vermutung in Dimension größer als zwei ermöglicht haben.

Wie gesagt, für Weil unterscheidet sich ein Kulturgut von einer agonistischen sportlichen Aktivität durch die Tatsache, dass das Ergebnis wichtiger ist als der individuelle Einsatz. Es ist sicher müßig zu bemerken, dass diese Einstellung durchaus auf massive Kritik stößt, z.B. wurde er aufs heftigste kritisiert von Serge Lang, einem der vehementesten Verfechter der Notwendigkeit, mathematische Ergebnisse aufs sorgfältigste und in glasklarer Weise ihren Entdeckern zuzuordnen. Lang kämpfte immer gegen den „Konformismus des allgemeinen Mathematikers", welchen auch Perelman kritisiert.

In gewisser Weise hat jedoch Weil recht: wenn wir Fußballfans sind, so ist uns wichtiger, dass der Fußball weiterlebt, als eine gerechte Entscheidung, ob Pelé oder Maradona der größte Fußballspieler aller Zeiten ist.

Doch auch mein Kollege Procesi hat recht, wenn er sagt, dass die Welt des Fußballs vernünftiger ist als die Welt der Mathematik, denn niemand hat jemals auch nur im Traum daran gedacht, dass Diego Maradona in vernünftiger Weise die napoletanische Fußballvereinigung verwalten könne.

Dennoch bleibt die Frage (und das sowohl im Fußball wie auch in der Mathematik), ob eine Expansionspolitik von einem Präsidenten betrieben werden kann, der noch nie in seinem Leben Fußball gespielt hat, oder besser von einem ehemaligen Spitzenspieler, der zumindestens genau weiß was Fußball auf hohem Niveau ist und zukünftige Starfußballer früh erkennen kann.

Wer sind die heutigen Politiker, die über die zukünftige wissenschaftliche Entwicklung entscheiden? Und warum sollten sie sich für eine Weiterentwicklung und nicht für Reduktionen oder Kürzungen entscheiden?

Dennoch beginnen einige meiner Freunde und Kollegen auf positive Entwicklungen zu hoffen. Sie erinnern sich daran, dass Sputnik, die Rand Corporation und der Wettlauf um die stellare und militärische Vorrangstellung eine entscheidende Rolle für die rasante wissenschaftliche Entwicklung der 50iger, 60iger und 70iger Jahre gespielt haben, und sie sind der Meinung, dass die technologische Herausforderung von aufstrebenden Ländern wie China und Indien eine Kehrtwende der europäischen und westlichen Politik bezüglich Investitionen in die wissenschaftliche Weiterentwicklung herbeiführen muss.

Heutzutage fehlen sogar in Frankreich Persönlichkeiten wie Borel, Painlevé und Poincaré, herausragende Mathematiker, die großen Einfluss auf die allgemeine Landespolitik hatten. Dennoch wollen wir optimistisch sein.

Aber auf welcher Grundlage?

Schwierig zu sagen, einerseits könnte ich den „Optimismus des Willens" von Gramsci zitieren, aber andererseits muss ich an erste Stelle das wachsende Bewusstsein der mathematischen Gesellschaft über die Wichtigkeit der Beziehungen zwischen Politikern und denen, die an der Schaffung und Verwendung von Wissen beteiligt sind, setzen.

In diesem Moment konzentriert sich die Aufmerksamkeit auf das Problem der wissenschaftlichen Veröffentlichungen, die heutzutage ganz allein vom Mathematiker produziert wird, aber ihm dennoch entzogen wird, da er das Copyright abgeben muss und aufgrund von mangelnden Mitteln die jeweiligen Zeitschriften nicht mehr in den Bibliotheken der Universitäten vorhanden sind.
Eine politische Antwort wäre die „low cost" Publikation und das Festhalten des Autors am Copyright (eine Problematik mit der sich in Deutschland schon die Deutsche Forschungs Gemeinschaft, die Max Planck Gesellschaft und die Alexander von Humboldt Stiftung auseinandergesetzt haben).
Gleichermaßen darf man die immense Wichtigkeit der wissenschaftlichen Zusammenarbeit, die sich wie ein Ölteppich verbreitet hat und den Mathematiker heute zu einem Weltbürger macht, nicht unterschätzen.
Zum Abschluss möchte ich noch herausstreichen, dass derartige Kollaborationen nicht nur ein „business" sind, welches durch Zusammenspiel verschiedener Erfahrungen und Expertisen zu weitreichenden und tiefen Ergebnissen führt (durch sogenannte „cross-fertilization"), sondern aus der mathematischen Diskussion (fast von sokratischem Typ) intensive und langdauernde (und nicht nur wissenschaftliche) Freundschaften entstehen. Hierbei denke ich im besonderen an das wissenschaftliche Werk von David Hilbert und seine lebenslange Freundschaft mit Hermann Minkowski und Adolf Hurwitz. Diese Freundschaft, geboren in Königsberg (als zwei der drei Mathematiker noch keine zwanzig Jahre alt waren) hat sie in intensiver Forschungsarbeit an den wichtigsten Entwicklungen der Mathematik für ihr ganzes Leben vereint. Solange alle drei Freunde am Leben waren, war Hilberts Kreativität am größten, und hat ihn zu einem globalen Optimisten werden lassen, eine Einstellung, die man meiner Meinung nach noch teilen muss.

Und somit möchte ich mit einem Zitat von David Hilbert enden, mit dem er seine berühmte Königsberger Rede beendete:

„Wir müssen wissen, wir werden wissen!"

Mit Sicherheit sind auch wir alle diesem hehren Ziel verpflichtet. ■

Anmerkung:

Es gibt viele weitere Themen, die ich behandeln hätte wollen, doch, um es mit Kundera zu sagen, dieses Mal wollte ich die „Leichtigkeit" obenan stellen. Die folgende kurze Literaturliste gibt Anregungen auch in andere Richtungen.

Schließlich möchte ich Stefan Endrass, John Hubbard, Oliver Labs, Hans Otto Peitgen und Springer Italia für die Erlaubnis ihre Bilder zu veröffentlichen danken.

Literatur

Michael Atiyah, *Mathematics: art and science*, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 43, No.1 (2005), pp. 87-88.

Walter Benjamin, *Das Kunstwerk im Zeitalter seiner technischen Reproduzierbarkeit*, Zeitschrift für Sozialforschung (1936).

Armand Borel, *On the Place of Mathematics in Culture*, in 'Duration and Change. Fifty years at Oberwolfach, M.Artin, H. Kraft, R. Remmert, editors. Springer Verlag (1994), pp. 139-158.

Jeremy Gray, *On the history of the Riemann mapping theorem*, Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo Serie II, Suppl. 34 (1994), pp. 47-94.

David Hilbert, *Wissen und mathematisches Denken*, Vorlesung Wintersemester 1922/23, ausgearbeitet von W. Ackermann, Mathematisches Institut Göttingen (1988).

John Kingman, EMS President, *Editorial: An Ocean of Mathematics*, European Mathematical Society Newsletter, (March 2003), p. 3.

Domenico Luminati, Italo Tamanini, *MATEtrentino percorsi matematici a Trento e dintorni*, Springer Italia (2006).

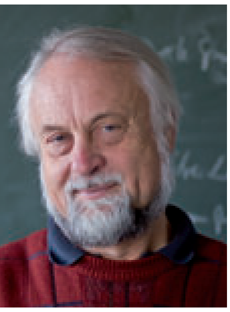
J. McKinsey, *Introduction to the Theory of Games*, the RAND Series[1] McGraw Hill, New York, Toronto, London (1952).

Dan Pedoe, *The gentle art of mathematics*, Dover (1973), reprint of the 1959 Macmillan Edition.

Hans Otto Peitgen, Peter H. Richter, *The beauty of fractals*, Springer Verlag (1986).

[1)] Die RAND Corporation, „a non profit organization, chartered to further and promote scientific, educational, and charitable purposes, all for the public welfare and security of the United States of America", publizierte in dieser Serie verschiedene Bücher, unter anderem mit den Titeln „The operational code of the Politburo", „Air war and emotional stress: psychological studies of bombing and civilian defense", „Soviet attitudes towards authority", "A study of Bolshevik Strategy and Tactics",...

Alexander von Humboldt, die Vielfalt der Natur,



Prof. Dr. Adalbert Kerber und Prof. Dr. Reinhard Laue

Einleitung

Die Vielfalt der Natur beruht insbesondere auf der Unzahl kombinatorischer Möglichkeiten, aus etwa hundert verschiedenen Atomen Moleküle zu bilden. Diese werden in erster Linie durch ihre *chemische Formel* beschrieben, Wasser zum Beispiel durch H_2O.
Es gibt eine große Fülle solcher Formeln, aber deren Vielzahl erklärt noch längst nicht alles, denn den meisten dieser Formeln entspricht eine große Anzahl von *verschiedenen Substanzen*, die zwar dieselbe Formel, aber verschiedene Eigenschaften haben (wie etwa verschiedene Siedepunkte, unterschiedliche pharmazeutische Eigenschaften etc.).

Dieser Unterschied beruht sehr oft auf verschiedenen Bindungen, d.h. Wechselwirkungen zwischen den Atomen, die das Molekül bilden. Ein einfaches Beispiel ist das bekannte Benzol mit der Formel C_6H_6. Tatsächlich gibt es 217 Moleküle dieser Formel, wenn man all die verschiedenen kombinatorischen Möglichkeiten zählt, mit denen sich sechs Kohlenstoffatome mit sechs Wasserstoffatomen binden können, wobei der Kohlenstoff als vierwertig, der Wasserstoff als einwertig angenommen wird. Der berühmte Sechsring, den Kekulé entdeckt hat, ist also nur *eine von sehr vielen* Möglichkeiten, eines von 217 *Bindungsisomeren*.
Weitere Unterschiede können in der geometrischen Gestalt liegen, was sich beispielsweise in unterschiedlichem Drehverhalten polarisierten Lichts äußern kann. Zum Beispiel können sich zwei Moleküle durch eine Spiegelung unterscheiden, so wie die linke Hand sich von der rechten Hand vor allem durch Spiegelbildlichkeit unterscheidet. Diese geometrischen Unterschiede sollen hier aber außer Betracht bleiben.
Neben diesem Sachverhalt selbst ist auch die Geschichte seiner Entdeckung (vgl. von Lippmann 1909) von großem Interesse. Und hier, bei dem gerade beschriebenen Phänomen der chemischen Isomerie, kommt für uns folgendes hinzu:

- Einmal lässt sich der Beginn dieser Entwicklung gut verfolgen, und er führt zudem erstaunlich weit zurück, nämlich fast 200 Jahre. Hinzukommt, dass am Anfang eine *Vermutung* steht, die man bei dem, der sie formulierte vielleicht nicht vermutet.
- Zum andern sind aus diesem Problem der Chemie zwei wichtige *mathematische Theorien* entstanden, die sich als außerordentlich fruchtbar erwiesen haben, sowohl für die Theorie, als auch für ihre Anwendungen. Es sind dies die *Graphentheorie* (die allerdings auch noch andere Quellen hat: das Königsberger Brückenproblem zum Beispiel, auch die Beschreibung elektrischer Schaltkreise) und die *kombinatorische Abzählungstheorie*.
- Des weiteren besitzt dieses Problem besondere *Aktualität*, weil *jetzt* erst die technischen Möglichkeiten zur Verfügung stehen, diesem Phänomen mit Hilfe erschwinglicher und effizienter Computer zu Leibe zu rücken, das heißt, in weiten Bereichen die Gesamtheit der chemischen Formeln und die diesen entsprechenden Isomere sämtlich zu ermitteln und Chemikern für die Forschung oder auch Schülern und Studenten im Unterricht vorzuführen!

Historisches

In einem am zwanzigsten Dezember 1796 in Bayreuth geschriebenen Brief (siehe Bruhns 1872) teilt Alexander von Humboldt dem Botaniker und Mediziner K. L. Willdenow folgendes mit:

> „..., so habe ich doch den Sommer viel zu Stande gebracht. Mein großes physikalisches Werk über den Muskelreiz und chemischen Prozeß des Lebens ist fast vollendet. Es enthält an 4000 Versuche und auch viel über Pflanzenphysiologie.“

Das hiermit angekündigte Buch erschien 1797 in Leipzig. Auf Seite 128 von Band I dieses Werks steht der folgende Satz, der damals in seiner vollen Tragweite für die Wissenschaft wohl kaum erkannt worden ist:

> „Drei Körper *a*, *b* und *c* können aus *gleichen* Quantitäten Sauerstoff, Wasserstoff, Kohlenstoff, Stickstoff und Metall zusammengesetzt und in ihrer Natur doch unendlich *verschieden* seyn.“

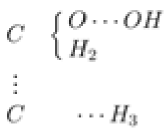
Diese Vermutung von Humboldts über die Ursache der Vielfalt der Natur (auf molekularer Ebene) wurde ein Vierteljahrhundert später – nach Entwicklung der entsprechenden analytischen Methoden – durch J. von Liebig, J. L. Gay–Lussac und F. Wöhler bestätigt. Hier ein entsprechendes Zitat aus einer Fußnote von Gay–Lussac zu einer Arbeit von Wöhler:

Adalbert Kerber, Reinhard Laue

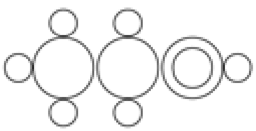
Mathematik und Informatik

„... comme ces deux acides sont très différents, il faudrait pour expliquer leur différence admettre entre leurs éléments un mode de combinaison différent. C'est un objet qui appelle un nouveau examen."

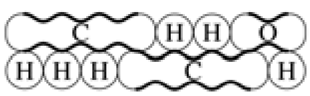
Es brauchte aber einige Zeit, bis diese Tatsache als allgemeines Phänomen anerkannt wurde. J. J. Berzelius gab ihm (etwa 1830) den Namen *Isomerie*. Chemiker versuchten dann, die Ursache dieses Phänomens mit Hilfe von Skizzen von Molekülen herauszufinden. Drei Versuche, das Molekül des Alkohols C_2H_5OH zu beschreiben, mögen dies illustrieren: Die erste der drei Skizzen stammt von Couper:



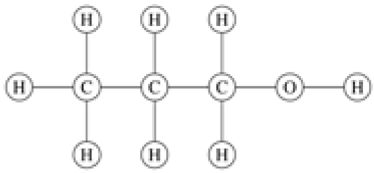
Hier ist Loschmidts Vorstellung von diesem Molekül:



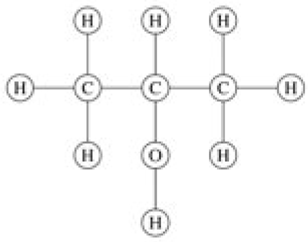
Und schließlich sei noch Kekulés Skizze angegeben:



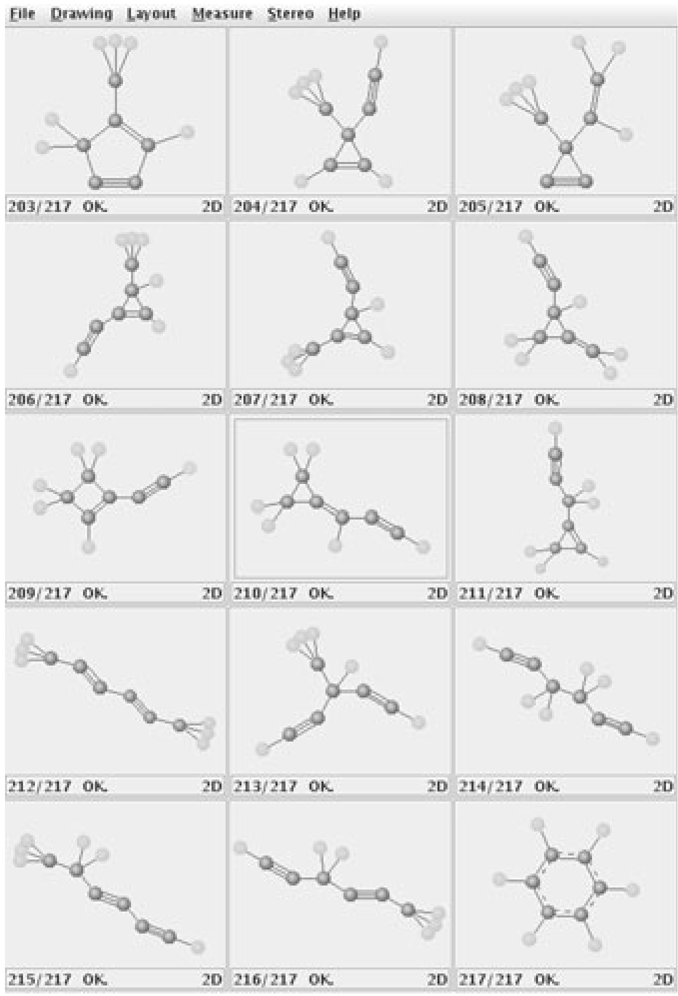
Der Durchbruch zur Lösung diese Problems gelang dann Alexander Crum Brown, der eine Variante von Loschmidts Methode benutzte, indem er die Kreise, die die verschiedenen Atome repräsentieren, auseinanderzog, und diejenigen durch Kanten verband, die er als irgendwie verbunden annahm. Hier sind seine Skizzen für Moleküle des Alkohols C_3H_7OH:



und



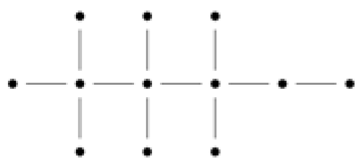
Diese Methode zur Skizzierung von Molekülen hat sich bis heute erhalten, denn sie ist in der Lage, die Vielfalt der Moleküle – und damit auch die Vielfalt der Natur – durch die große Anzahl kombinatorischer Möglichkeiten zu erklären, den durch die chemische Formel angegebenen Satz von Atomen gemäß den Valenzen dieser Atome auf verschiedene Weisen zu verbinden. So gibt es – wie bereits erwähnt – zum Beispiel zur Formel C_6H_6 des Benzols 217 Möglichkeiten, sechs Kohlenstoffatome C (mit Valenz 4) mit sechs Wasserstoffatomen H (der Valenz 1) zu verbinden. Von diesen 217 Isomeren sind bisher etwa fünfzig verschiedene wirklich hergestellt worden. Einige der 217 Isomere sind abgebildet:



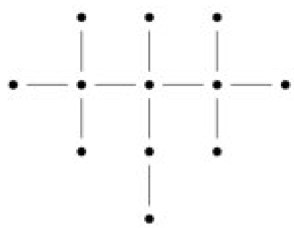
Für die Formel $C_8O_2H_{16}$ gibt es bereits 13190 Bindungsisomere! Dies ist natürlich eine unüberschaubare Anzahl von Graphen, es gilt deshalb, nur solche zu konstruieren, die gewissen Zusatzbedingungen genügen. So gibt es beispielsweise zur Formel C_3H_8O drei Bindungsisomere, aber nur in den beiden oben aufgeführten handelt es sich um Alkohole, bei denen ja das Sauerstoffatom an ein Wasserstoffatom gebunden sein muss.

Mathematik und Informatik

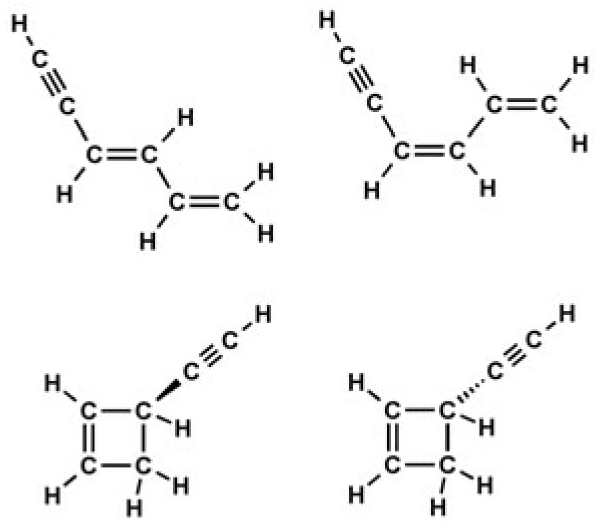
Die entsprechenden mathematischen Probleme der Bestimmung all dieser sogenannten *Bindungsisomere* zu vorgegebener chemischer Formel führten im 19. Jahrhundert zur Entwicklung zweier hilfreicher mathematischer Theorien, der *Graphentheorie* und der *kombinatorischen Abzählungstheorie* (vgl. etwa Biggs et al. 1977).
Graphen dienen unter anderem der Skizzierung von *Wechselwirkungen*, also zum Beispiel auch der Beschreibung von Mengen von Atomen, die teilweise wechselwirken, etwa in einem Molekül. Die Graphentheorie wird auf diese Weise die beiden oben angegebenen Beschreibungen der Isomere des Alkohols C_3H_7OH durch die folgenden beiden *Graphen* ersetzen:



und



Der Name *Graph* für diese Art von Inzidenzstruktur stammt übrigens von J. J. Sylvester, nämlich aus dessen Arbeit „Chemistry and Algebra" von 1877. Die *kombinatorische Abzählungstheorie* befaßt sich danach mit dem Problem, diese Graphen, die zu dem angegebenen Molekül, genauer: zu dessen Summenformel, gehören, abzuzählen, wenn möglich gar zu konstruieren, siehe Kerber 1991. 1937 hat G. Pólya diesem Problem die geeignete *algebraische Formulierung* gegeben, wonach Graphen als *Bahnen symmetrischer Gruppen* betrachtet werden und mit Hilfe entsprechender algebraischer Mittel abgezählt und sogar konstruiert werden können. Doch erst jetzt, mit der Entwicklung preiswerter und sehr leistungsfähiger Computer (das sind nämlich *algebraische Maschinen*), ist die Möglichkeit vorhanden, diese Theorie durch die Praxis einer *effizienten Konstruktion* dieser Moleküle zum Ziel hinzuführen.
Am Lehrstuhl II für Mathematik der Universität Bayreuth wurden deshalb DFG- und BMBF-Projekte zur Entwicklung von Algorithmen zur Konstruktion molekularer Strukturformeln und deren Implementierung durchgeführt. In enger Zusammenarbeit zwischen Mathematik, Informatik und Chemie ist dabei das Programmsystem MOLGEN entstanden, das diese Vielfalt zu konstruieren erlaubt, unter Beachtung von durch die Realität vorgeschriebenen Nebenbedingungen. Zu vorgegebener chemischer Formel erhält man, soweit die aktuelle Computertechnologie dies zulässt, alle Bindungsisomere, und jedes genau einmal. MOLGEN ergibt beispielsweise für die Formel $C_8O_2H_{16}$ die oben erwähnten 13190 Bindungsisomere. Verlangt man zusätzlich eine Substruktur der Form CO_2H, so ergeben sich 39 Bindungsisomere, also genau 39 Bindungsisomere dieser Formel gehören zur Substanzklasse der Säuren.
Die mathematischen Methoden entstammen der Algebra (gruppentheoretische Hilfsmittel werden intensiv eingesetzt) und der Kombinatorik, die Informatik ist für die Effizienz und für die benutzten Datenstrukturen zuständig.
Die wichtigsten Anwendungen dieses Programms und seiner Erweiterungen sind in der chemischen Strukturaufklärung und in der kombinatorischen Chemie zu finden. So erlaubt MOLGEN-MS die Analyse von Massenspektren und deren Abgleich mit dem generierten vollständigen Katalog von Bindungsisomeren um herauszufinden, zu welcher Struktur das gegebene Spektrum gehört. MOLGEN-QSPR erlaubt die Generierung molekularer Bibliotheken und deren Untersuchung mit Hilfe von ca. 700 molekularen Deskriptoren. Ziel ist dabei die Vorbereitung und Optimierung kombinatorischer Experimente im Vorhinein und der sparsamen Untersuchung im Nachhinein, auf der Suche nach chemischen Substanzen mit erwünschten Eigenschaften.
Der nächste Schritt ist die Berechnung dreidimensionaler Realisierungen und der Stereoisomere, die zu Bindungsisomeren gehören. Zu den 217 Bindungsisomeren des Benzols gibt es beispielsweise ca. 1000 *Stereoisomere*, d.h. wesentlich verschiedene Platzierungen im Raum. Hier gab es kürzlich wesentliche Fortschritte mit Hilfe der Konstruktion orientierter Matroide, siehe Gugisch 2005. Als Beispiele hier je zwei Stereoisomere von zwei Bindungsisomeren von C_6H_6.:



Neben diesen für die chemische Forschung konzipierten Programmpaketen (die weltweit zu den effizientesten zwei Generatoren gehören), wurden in enger Zusammenarbeit mit der Didaktik der Chemie Programme für den Chemieunterricht an Schulen MOLIS, und für das Chemiestudium UNIMOLIS entwickelt, die online zur Verfügung gestellt werden.

Die Vielfalt der Natur

Will man sich mit Hilfe von MOLGEN einen Überblick über die große Vielfalt möglicher chemischer Moleküle verschaffen, dann wird man vor den Generator ein Programm setzen, das alle chemischen Formeln ermittelt, also alle Folgen von Valenzen, zu denen es einen zusammenhängenden Multigraphen mit vorgegebenen Valenzen gibt. Beschränkt man sich beispielsweise auf Atome mit maximaler Valenz 4, so erhält man – selbst wenn man nicht einmal verschiedene Atome einer vorgegebenen Valenz zulässt – die folgende Tabelle von Anzahlen von zusammenhängenden Multigraphen mit gegebener Valenzenfolge), die das rasante Ansteigen der Vielfalt augenfällig demonstriert:

Atome	Formeln	Multigraphen
3	9	9
4	18	37
5	27	146
6	41	772
7	56	4449
8	78	30307
9	101	228605
10	132	1921464

Bedenkt man jetzt, dass es Moleküle mit Hunderten von Atomen gibt, so wird klar, dass die bisher gemessenen und katalogisierten Substanzen, deren Anzahl sich im zweistelligen Millionenbereich bewegt, erst die berühmte „Spitze des Eisbergs“ bilden.

Zusammenfassung

Das beschriebene Isomerieproblem der Chemie hat sich aus mannigfacher Sicht als sehr interessant herausgestellt:

- Seine Existenz wurde von Alexander von Humboldt behauptet, als dieser in der Umgebung von Bayreuth bei der Organisation des Bergbaus tätig war, das liefert schon einmal einen lokalen Bezug.
- Darüberhinaus ist die Lösung dieses Problems durch Entwicklung mathematischer Modelle („molecular modeling“) sehr wichtig für die molekulare Strukturaufklärung und für die moderne Kombinatorische Chemie.
- Die Lösung dieses Problems ist auf der arithmetischen Ebene (Berechnung der möglichen chemischen Formeln) und auch auf topologischem Niveau (Konstruktion aller Bindungsisomere zu einer Summenformel) erfolgreich implementiert worden.
- Eine effiziente Lösung auf der geometrischen Ebene (Katalogisierung aller Stereoisomere zu vorgegebenem Bindungsisomer) ist eine Herausforderung an zukünftige Forschungen.

Projekte dieser Art erfordern eine sehr enge Zusammenarbeit von Mathematik und Informatik, wenn sie zu effizienten Programmsystemen führen sollen, die dem Stand der Theorie und der Computerentwicklung entsprechen. Mathematik und Informatik können dann gemeinsam ihre Fähigkeiten als *sanfte Techniken* und als *preiswerteste Teile* der *neuen Technologien* unter Beweis stellen. Die neuerdings fast überall vorhandenen effizienten Rechner sind einerseits eine Herausforderung an die Mathematiker, die Theorie bis zur Praxis hin voranzutreiben, andererseits führt Praxisbezug oft zur Entwicklung neuer Theorien, das zeigt ganz anschaulich das gerade beschriebene Beispiel der Entstehung von Graphentheorie und kombinatorischer Abzählungstheorie. Darüberhinaus ist die sehr große Komplexität solcher Probleme eine Herausforderung an die Informatik, den Entwurf effizienter Algorithmen zu studieren. In einer Kooperation von Forschern beider Gebiete besteht die Möglichkeit, die Theorie für die Lösung praktischer Probleme so zu nutzen, dass ganz neue Bereiche zugänglich werden. Zugleich ergeben sich aus den praktischen Problemen Anregungen, in welcher Richtung und auf welche Weise neue Ergebnisse erzielt werden können. Damit bestätigt sich das viel zitierte Motto von Gustav Robert Kichhoff: ***„Nichts ist praktischer als eine gute Theorie“***. ■

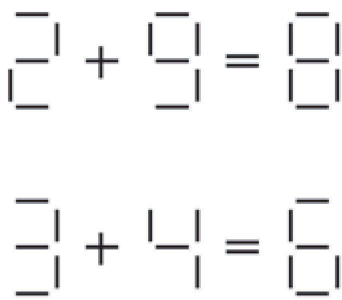
Literatur und Internet-Seiten

N. L. Biggs, K. E. Lloyd, R. J. Wilson, Graph theory 1736-1936, *Clarendon Press*, 1977.
K. Bruhns (Herausgeber), Alexander von Humboldt, Biographie in drei Bänden, *Brockhaus* 1872.
R. Gugisch, Konstruktion von Isomorphieklassen orientierter Matroide, *Bayreuther Math. Schriften* **72** (2005), 1-130.
A. von Humboldt, Versuche über die gereizte Muskel- und Nervenfaser, nebst Vermutungen über den chemischen Prozeß in der Tier- und Pflanzenwelt, *Rottmann, Leipzig* 1797.
A. Kerber, Algebraic combinatorics via finite group actions, *BI–Wissenschaftsverlag*, 1991.
A. Kerber, R. Laue, D. Moser, Ein Strukturgenerator für molekulare Graphen, *Analytica Chimica Acta* **235** (1990), 221-228.
E. O. von Lippmann, Alexander von Humboldt als Vorläufer der Lehre von der Isomerie, *Chemiker-Zeitung* **1909**, Nr. 1, 1–8.
M. Meringer, Mathematische Modelle für die kombinatorische Chemie und die molekulare Strukturaufklärung, *Logos-Verlag* 2004, xxxiv+356 S.
G. Pólya, Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, *Acta Sci. Math.* **68** (1937), 145-254.
J. J. Sylvester, Chemistry and Algebra, *Nature* **17** (1877), 103-104.

www.molgen.de, www.unimolis.uni-bayreuth.de/molis, www.unimolis.uni-bayreuth.de

Sascha Kurz

Mathematik zur Entspannung –



Die häufig anzutreffende Übersetzung „Unterhaltungsmathematik" von „Recreational Mathematics" trifft den Kern der Sache nicht wirklich. Gemeint sind mathematische Spiele und Puzzle, die meist keine tieferen Kenntnisse der Mathematik voraussetzen. Obwohl der verwendete Stil weniger formal und eher unterhaltend bzw. kurzweilig ist, werden nichtsdestotrotz auch aktuelle Forschungsfragen aufgegriffen bzw. neue Forschungsfragen motiviert.

Abbildung 1: Welches Hölzchen muss man umlegen?

Dr. Sascha Kurz

Streichholzlegespiele, wie in Abbildung 1 dargestellt, haben die meisten schon einmal gesehen. Hier gilt es jeweils genau ein Hölzchen so umzulegen, dass die zwei Gleichungen richtig sind. Sie sind ein netter Zeitvertreib, und junge Schüler können mit ihnen spielerisch Plus und Minus üben. Aber enthalten Streichholzspiele auch „richtige" Mathematik?

Bauwerke mit vielen Streichhölzern

Legt man mehrere Streichhölzer Kopf an Kopf, so entsteht ein sogenannter Graph. Die Stellen an denen ein oder mehrere Köpfe zusammentreffen nennen wir Knoten des Graphens und die Streichhölzer, die diese Knoten verbinden, nennen wir Kanten des Graphens.
Legt man solche Streichholzgraphen, so stellt sich die Frage, wie viele Streichhölzer es bei fester Knotenanzahl maximal werden können. In Abbildung 2 ist als Beispiel ein Streichholzgraph aus 7 Knoten und 11 Streichhölzern gezeichnet. Es soll zunächst zugelassen werden, dass sich die Streichhölzer überkreuzen (zwei Kanten dürfen jedoch höchstens einen gemeinsamen Punkt besitzen, also z.B. nicht direkt übereinander liegen).
Mit u (n) bezeichnen wir die maximal mögliche Kantenanzahl eines Streichholzgraphen mit n Knoten. Im Rahmen einer Diplomarbeit sind folgende Zahlen bestimmt worden:

n	1	2	3	4	5	6	7
u(n)	0	1	3	5	7	9	12
n	8	9	10	11	12	13	14
u(n)	14	18	20	23	27	30	33

Am liebsten hätte man natürlich eine Formel für u (n) (wie z.B. u (n)=3 n), denn dann könnte man u (n) für alle vernünftigen n sofort angeben. Leider ist so eine Formel für den genauen Wert unbekannt. Immerhin kennt man Formeln für sogenannte untere und obere Schranken: Man weiß, dass Zahlen a und b existieren mit

$$n^{1+\frac{a}{\log \log n}} \leq u(n) \leq bn^{\frac{4}{3}} .$$

Paul Erdös vermutete, dass die untere Schranke die richtige ist und setzte ein Preisgeld für einen Beweis oder eine Widerlegung dieser Vermutung aus. Leider ist Paul Erdös 1996 verstorben; das Preisgeld gibt es aber immer noch zu gewinnen.

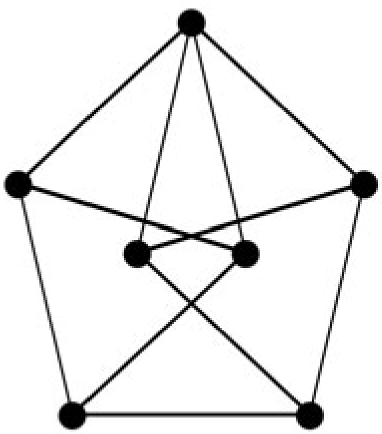


Abbildung 2: Die Moser-Spindel.

Färbungszahl der Ebene

Ein weiteres ungelöstes mathematisches Problem ist die sogenannte Färbungszahl der Ebene. Hierbei ist eine Färbung der Ebene mit möglichst wenig verschiedenen Farben gesucht, so dass je zwei Punkte mit Abstand eins unterschiedlich gefärbt sind. Etwas schwierig ist bei diesem Problem, dass die Ebene aus unendlich vielen Punkten besteht.
Um endliche Teilprobleme zu bekommen, können wir das Problem betrachten, die Knoten von Streichholzgraphen mit möglichst wenig Farben so zu färben, dass jedes Streichholz zweifarbig ist. Der Leser ist herzlich dazu eingeladen nachzuprüfen, dass die Moser-Spindel aus Abbildung 2 nicht mit drei Farben gefärbt werden kann. Die Färbungszahl der Ebene beträgt also mindestens vier.
Interessanterweise lässt sich auch jeder andere Streichholzgraph mit höchstens 6197 Knoten (weiter hat man bisher noch nicht gerechnet) mit sechs Farben so färben, dass jedes Streichholz zweifarbig ist. Falls es einen Streichholzgraphen gibt, bei dem man sieben Farben benötigt, so muss dieser schon ziemlich viele Knoten besitzen.
In Abbildung 3 ist eine Färbung der Ebene mit sieben Farben angegeben (die natürlich noch periodisch auf die ganze Ebene fortgesetzt werden muss), so dass für die Färbungszahl der Ebene

$$4 \leq \chi\left(\mathbb{E}^2\right) \leq 7$$

*) *Ebenfalls der Titel des Tagungsbandes einer Recreational Mathematics Tagung, der auf die zwei Bedeutungen „leicht“ und „ein Streichholz anzünden“ (to light a match) anspielt.*

The Lighter Side of Mathematics*

gilt. Dies ist auch der aktuelle Kenntnisstand in dieser Frage. Für den dreidimensionalen Raum ist unser Wissen sogar noch beschränkter:

$$6 \leq \chi\left(\mathbb{E}^3\right) \leq 15$$

Regelmäßige Streichholzgraphen

Ein regelmäßiger Graph, ein sogenannter k-regulärer Graph, ist ein Graph, bei dem jeder Knoten Endpunkt von genau k Kanten ist. Das Kantenmodell eines Würfels ist z.B. ein drei-regulärer Graph. Heiko Harborth warf die Frage nach der kleinstmöglichen Knotenanzahl n (k) eines k-regulären Streichholzgraphen auf. Die bisher bekannten Werte sind n (1)=2, n (2)=3, n (3)=6, n (4)=9 und n (5)=18.
Mit Hilfe sogenannter iterierter Minkowski-Summen von Dreiecken, siehe Abbildung 4, für ein Beispiel einer Minkowski-Summe, lassen sich Beispiele konstruieren, die zu einer oberen Schranke von

$$\begin{cases} 3^{k/2} & \text{für gerade k,} \\ 2 \cdot 3^{(k-1)/2} & \text{für ungerade k} \end{cases}$$

führen. Es wird vermutet, dass diese Konstruktion optimal ist.

Streichholzgraphen ohne Überkreuzungen

Die Kanten des Streichholzgraphen aus Abbildung 2 überkreuzen sich zum Teil. Verbieten wir dies, so spricht man von planaren Graphen bzw. ihren Einbettungen in die Ebene, und wir können die Fragen aus den vorherigen Abschnitten erneut betrachten.

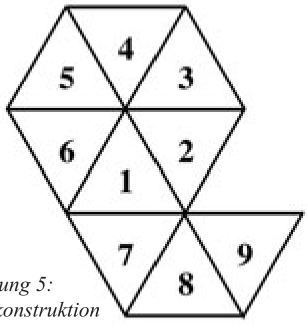


Abbildung 5: Spiralkonstruktion

Die maximal mögliche Kantenanzahl eines Streichholzgraphen aus n Knoten ohne Überkreuzungen bezeichnen wir mit U (n). Beginnt man mit einem Dreieck und nimmt man auf einem regulären Dreiecksgitter spiralförmig weitere Einheitsdreiecke hinzu, siehe Abbildung 5, so erhält man die untere Schranke

$$U(n) \geq 3n - \left\lceil \sqrt{12n-3} \right\rceil$$

Für n=7 erhält man bei dieser Konstruktion ein regelmäßiges Sechseck inklusive seinem Mittelpunkt. Nachzählen liefert

$$3 \cdot 7 - \left\lceil \sqrt{12 \cdot 7 - 3} \right\rceil = 12$$

Kanten. Es wird vermutet, dass diese untere Schranke nicht verbessert werden kann.
Diese Spiralkonstruktion ist aber bewiesenermaßen die optimale Lösung eines anderen Problems. Betrachten wir hierzu die Aufgabe, n Einheitskreise so in die Ebene zu legen, dass sie sich nicht überlappen und die maximal mögliche Anzahl an Berührungspunkten haben, siehe Abbildung 6.

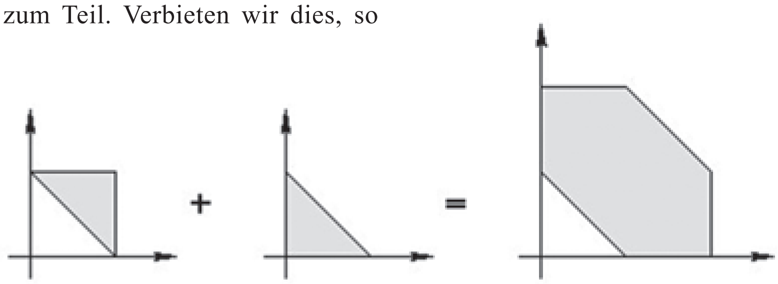


Abbildung 4: Beispiel einer Minkowski-Summe $S_1 \oplus S_2 := \{p+q \mid p \in S_1, q \in S_2\}$.

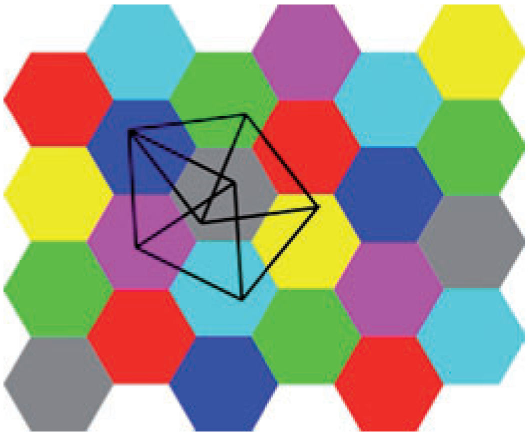


Abbildung 3: Eine Färbung (Quelle: David Eppstein - The Geometry Junkyard).

Färbungszahl von planaren Graphen

Im Gegensatz zur Färbungszahl der Ebene bzw. der Färbungszahl von Streichholzgraphen ist die Färbungszahl von planaren Graphen (sogar ohne die Einschränkungen die Streichholzgraphen mit sich bringen) vollständig bestimmt worden. Das Ergebnis ist der berühmte Vierfarbensatz von Appel und Haken aus dem Jahre 1976. Er besagt, dass man jede Landkarte, bei der die einzelnen Länder zusammenhängend sind, mit Hilfe von höchstens vier Farben so färben kann, dass keine zwei Länder mit einer gemeinsamen Grenzlinie in derselben Farbe gefärbt sind, oder eben auch, dass man planare Graphen mit höchstens vier Farben so färben kann, dass alle Kanten zweifarbig sind.

Regelmäßige Streichholzgraphen ohne Überkreuzungen

Nehmen wir bei dem Problem „k-reguläre Streichholzgraphen mit der

Mathematik zur Entspannung – The Lighter Side of Mathematics

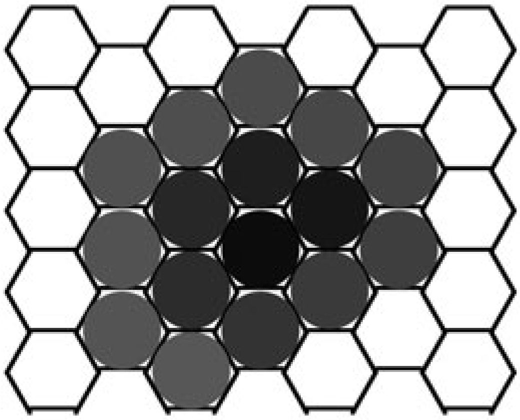


Abbildung 6: Einheitskreise mit der maximalen Anzahl an Berührungspunkten.

kleinsten Anzahl N (k) an Knoten“ noch die Eigenschaft, dass sich keine zwei Kanten im Inneren überkreuzen dürfen, hinzu, so erhalten wir ein sehr interessantes offenes Problem.

Für k = 1 und k = 2 sind die kleinsten Beispiele durch einen Punkt und ein Dreieck gegeben, so dass N (1) = 1 und N (2) = 3 gilt. Die Bestimmung des Beispiels zu N (3) = 8 ist ein nettes kurzweiliges Rätsel. Also packen Sie die Streichhölzer aus. Falls Sie kein Beispiel mit 8 Knoten bzw. 12 Kanten finden, so versuchen Sie es doch einfach mit 10 Knoten bzw. 15 Kanten. Haben Sie das Beispiel jedoch einmal entdeckt, so bietet sich eine gute Möglichkeit, sich in Kneipen das eine oder andere Bier zu erwetten.

Da planare Graphen (also insbesondere auch regelmäßige Streichholzgraphen ohne Überkreuzungen) mindestens einen Knoten, der Endpunkt von höchstens fünf Kanten ist, besitzen, ist N (k) keine endliche Zahl, sobald k größer als fünf ist. Ob es einen fünf-regulären Streichholzgraphen ohne Überkreuzungen gibt, ist immer noch ein offenes Problem, auch wenn Beweise für die Nichtexistenz solcher Graphen gegeben wurden (die, wie sich im Nachhinein herausstellte, alle Lücken hatten).

Für k=4 ist das kleinste bisher bekannte Beispiel der in Abbildung 7 abgebildete sogenannte Harborth Graph. Dieser Graph fungiert nun doch schon seit einigen Jahren als Logo der Abteilung für Diskrete Mathematik an der Technischen Universität Braunschweig[1]. Bisher konnte jedoch noch niemand seine Minimalität beweisen bzw. ein kleineres Beispiel angeben.

Wir wollen nun eine untere Schranke für die Anzahl der Knoten eines minimalen Beispiels herleiten und machen das, was man in der Mathematik häufig macht: wir formulieren das Problem um und ignorieren zunächst einmal einige unserer Nebenbedingungen. In der Chemie bezeichnet man chemische Verbindungen der gleichen Summenformel, aber unterschiedlicher chemischer Struktur und somit teilweise auch unterschiedlichen biologischen Eigenschaften, als Strukturisomere, siehe Abbildung 8 für die zwei möglichen Strukturisomere des Butans.

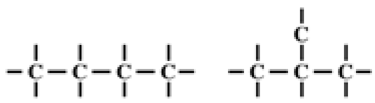


Abbildung 8: Strukturisomere des Kohlenwasserstoffs C_4H_{10} (Butan).

Die pharmazeutische Industrie ist fortwährend auf der Suche nach neuen Medikamenten und Wirkstoffen, welche die gewünschten Eigenschaften der bekannten Originale, etwa von Aspirin, teilen bzw. sogar übertreffen. Da man auch in den industriellen Großlabors nur begrenzt viele Substanzen testen kann, verwendet man Computer um vorherzusagen, welche Strukturen die gewünschten Eigenschaften haben können. Aus diesen und anderen Gründen gibt es Computerprogramme, wie z.B. Molgen [2], welches an der Universität Bayreuth entwickelt wurde, mit denen man alle Strukturisomere zu einer gegebenen Summenformel im Computer erzeugen kann.

Doch was haben unsere regulären kreuzungsfreien Streichholzgraphen nun mit chemischen Verbindungen zu tun? Wenn wir die Strukturisomere eines Kohlenstoffmoleküls Cn erzeugen, so erhalten wir Graphen, die vier-regulär sind. Die Eigenschaften, dass der Graph planar und die Kanten die Länge eins haben sollen, können wir zwar nicht direkt mit Hilfe von Molgen erzwingen, aber es gibt einen Trick, wie man die Anzahl der erzeugten Kandidaten reduzieren kann. Von bestimmten kleinen Graphen kann man mit etwas Mathematik herausfinden, dass sie entweder nicht planar sind oder kein Teil eines Streichholzgraphen sein können, siehe Abbildung 9.

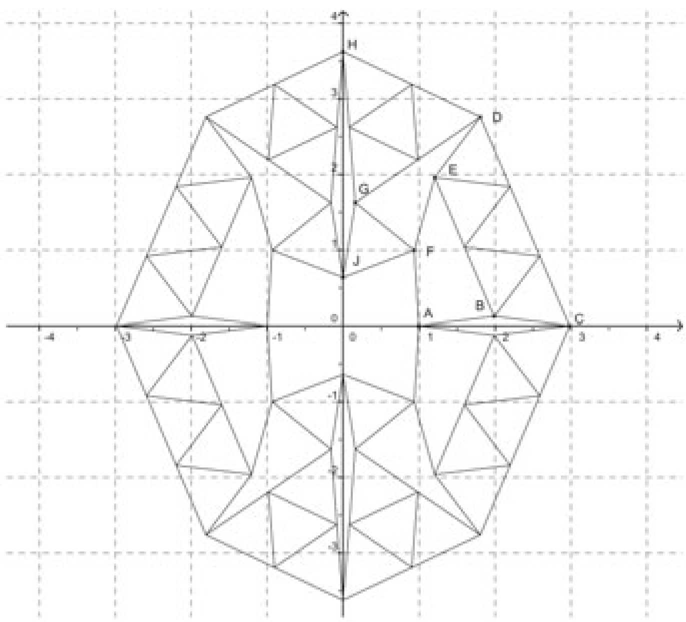


Abbildung 7: Der Harborth Graph - ein 4-regulärer kreuzungsfreier Streichholzgraph aus 52 Knoten. (Quelle: E. H.-A Gerbracht - Minimal Polynomials for the Coordinates of the Harborth Graph)

[1] *http://www.mathematik.tu-bs.de/dm/*

[2] *http://molgen.de, siehe dazu auch den Beitrag „Alexander von Humboldt, die Vielfalt der Natur, Mathematik und Informatik“ in diesem Heft*

Da die Eigenschaften von chemischen Verbindungen zum Teil auch durch ihre Teilverbindungen bestimmt werden, kann Molgen, siehe Abbildung 10 für einen Screenshot, mit solchen verbotenen Teilgraphen umgehen. Damit lässt sich zeigen, dass jeder vier-reguläre kreuzungsfreie Streichholzgraph aus mindestens 19 Knoten bestehen muss (diese untere Schranke lässt sich „mit der Hand" noch weiter verbessern, was aber etwas fehleranfällig ist, da viele Teilfälle unterschieden werden müssen).

Ein übersehenes klassisches Problem?

Bei der Betrachtung von Streichholzgraphen hat man damit zu kämpfen, dass diese zum Teil beweglich sein können, und man somit nicht mit festen Koordinaten rechnen kann.
Ein Ansatz, mit dem man manchmal die Nichtexistenz von kreuzungsfreien Streichholzgraphen zeigen kann, sind Flächeninhaltsbetrachtungen: Der rechte Graph aus Abbildung 9 besitzt als äußere Fläche ein Dreieck. Im Inneren müssten aber drei gleich große Dreiecke enthalten sein, was natürlich nicht möglich ist.
Wenn die äußere Fläche, nun etwas allgemeiner, ein k-Eck ist, so können alle inneren Flächen zusammen höchstens so viel Fläche wie ein gleichseitiges k-Eck der Seitenlänge eins besitzen. Die größten gleichseitigen k-Ecke sind bekanntlich die regelmäßigen k-Ecke. Man kann die Frage aber auch in die andere Richtung stellen: Welchen Flächeninhalt hat ein gleichseitiges k-Eck mit Seitenlänge eins mindestens?
Für gerade k kann man beliebig nahe an den Flächeninhalt Null herankommen, indem man eine von zwei Seiten begrenzte Strecke betrachtet. Mit einer ähnlichen Konstruktion kann man für ungerades k beliebig nahe an den Flächeninhalt eines gleichseitigen Einheitsdreiecks herankommen, aber ist dies bereits die minimal mögliche Fläche? Für $k=3,5,7$ ist sie es bewiesenermaßen, für größeres k bleibt dies nur eine Vermutung.

Wie schwierig sind Streichholzprobleme?

Wir haben ein paar ungelöste Probleme mit Streichholzgraphen gesehen. Eine aus der Informatik bekannte Möglichkeit, die algorithmische Schwierigkeit von Problemen zu messen, ist anzugeben, ob es einen Lösungsalgorithmus geben kann, der ein Problem in polynomialer Laufzeit, gemessen in Abhängigkeit vom Speicherverbrauch der Problemdaten, geben kann oder nicht. In unserem Fall besteht das Problem darin zu entscheiden, ob ein gegebener Graph kreuzungsfrei als Streichholzgraph in die Ebene einbettbar ist oder nicht. Dieses Problem ist ***NP***-schwer, d.h. es gibt vermutlich keinen polynomialen Algorithmus für dieses Problem. Falls jemand doch einen findet, so ist er um eine Million Dollar reicher, denn dann hätte er eines der sieben Milleniumsprobleme der Mathematik gelöst (ausgeschrieben vom Clay Mathematics Institute [3]).
Streichholzprobleme sind doch nur Rumprobiererei, was soll daran schwierig sein? Sicherlich findet man mit etwas Geduld einen drei-regulären Streichholzgraphen aus acht Knoten ohne Überschneidungen. Die Entdeckung des Harborth Graph ist bestimmt eine sehr beachtliche Puzzleleistung, aber muss man dafür etwas von Mathematik verstehen? Auch wenn der Entdecker Mathematikprofessor ist, braucht man ehrlich gesagt für das Finden der Lösungen von Streichholzaufgaben keine oder nur wenig Mathematik. Der schwierige Teil ist zu zeigen, dass es kein Beispiel mit weniger als 52 Knoten geben kann. Denn, nur weil seit etlichen Jahren kein kleineres Beispiel gefunden wurde, heißt das noch lange nicht, dass es keines geben kann.
Um anzudeuten, wie schwer sich die Mathematik mit Streichholzgraphen tut, soll erwähnt werden, dass es erst 2006 gelungen ist, die Koordinaten des Harborth Graphen mit Hilfe von Computeralgebra zu berechnen. Sie sind Nullstellen von Polynomen vom Grad 22 (weniger geht nicht!). Streichholzprobleme können also mitunter ziemlich schwierig sein, wenn man die zugrunde liegende Mathematik betrachtet. Kennt man diese aber erst gar nicht oder ignoriert sie einfach, so kann es eben doch manchmal gelingen, so ein Problem mit elementaren cleveren Ideen zu lösen. ■

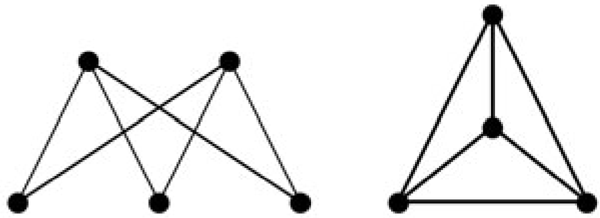


Abbildung 9: Verbotene Teilgraphen

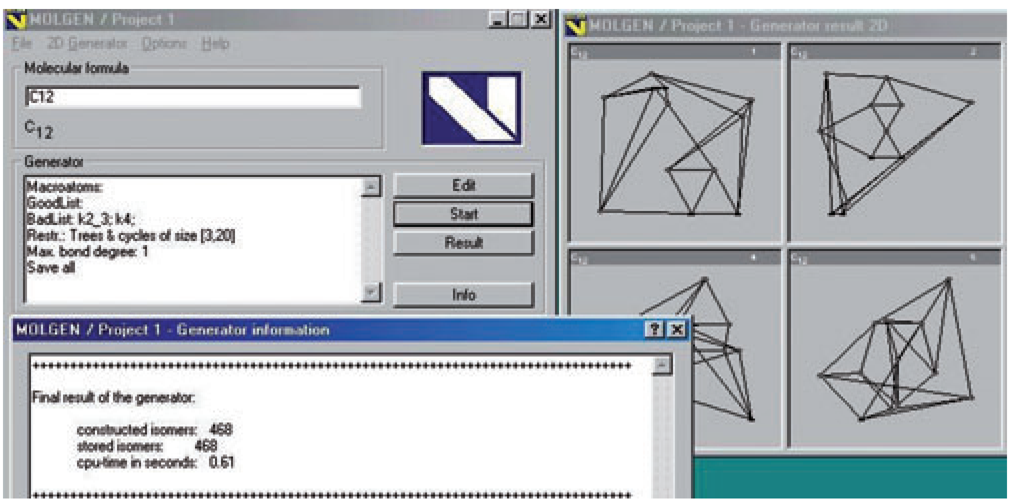


Abbildung 10: Screenshot des Computerprogramms Molgen

[3] *http://www.claymath.org*

Mathematik an der Universität

Die Mathematik gliedert sich in viele Teildisziplinen, die sich mit ganz unterschiedlichen Fragestellungen beschäftigen. Hier wollen wir Ihnen vorstellen, welche dieser Gebiete an der Universität Bayreuth vertreten sind, und einige aktuelle Forschungsthemen anhand von Beispielen darstellen.

Prof. Dr. Christian Simader, Lehrstuhl für Mathematik III

Prof. Dr. Wolf von Wahl, Lehrstuhl für Mathematik VI

Prof. Dr. Gerhard Rein, Lehrstuhl für Mathematik VI

Obwohl die Mathematik eine der ältesten Wissenschaften ist, ist sie hochaktuell und hat gerade in den letzten 20 Jahren eine spektakuläre Entwicklung gemacht. Als Höhepunkte seien nur die Beweise der Fermatschen Vermutung und der Poincaré-Vermutung genannt – Probleme, die Generationen von Mathematikerinnen und Mathematikern zur Entwicklung völlig neuer Theorien inspiriert haben. Mathematik durchzieht aber auch wie keine andere Wissenschaft andere Wissensgebiete – in vielen Studiengängen findet man heutzutage mathematischen Vorlesungen, und mit John Nash und Robert Aumann wurden in den letzten Jahren gleich zwei Mathematiker mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften ausgezeichnet. Zudem prägt Mathematik unser tägliches Leben: Kaum jemand nimmt wahr, in wie vielen Produkten unseres Alltags Mathematik steckt. Die Mathematik spielt damit eine Schlüsselrolle für die technologische Entwicklung, oder wie Werner von Siemens sagte: „Ohne Mathematik tappt man doch immer im Dunkeln“.

Mathematik fasziniert – ob nun durch die Schönheit und Eleganz ihrer abstrakten Konzepte oder durch die Lösungsperspektiven, die sie für konkrete Probleme eröffnet. Ihre grundlagen- und ihre anwendungsorientierten Seiten befruchten einander und spiegeln sich in den mathematischen Forschungsrichtungen an der Universität Bayreuth wider: Analysis, Algebra, Geometrie und Zahlentheorie bilden die grundlegenden Säulen der Mathematik. Stochastik, Numerische Mathematik und Optimierung sind eher anwendungsorientierte Fachrichtungen. Die Didaktik der Mathematik schließlich verbindet die Fachwissenschaft mit der Schulpraxis.

Neben der fachlichen Qualifikation vermittelt das Mathematikstudium Kompetenzen wie Abstraktionsvermögen, Durchhaltevermögen, Problemlösungskompetenz sowie die Fähigkeit, komplexe Zusammenhänge zu strukturieren. Daher haben Absolventinnen und Absolventen mathematischer Studiengänge seit jeher exzellente Berufschancen, sei es bei Banken oder Versicherungen, in Unternehmensberatungen oder im Management, in der Großindustrie, aber bei auch bei mittelständischen Softwareunternehmen, natürlich in der wissenschaftlichen Forschung an einer Universität oder einem Forschungsinstitut und nicht zuletzt als Lehrerin oder Lehrer an allen Schularten.

Analysis

Lehrstuhl für Mathematik III – Reelle Analysis,
Prof. Dr. Christian Simader,
www.math.uni-bayreuth.de/org/mathe3

Lehrstuhl für Mathematik VI – Partielle Differentialgleichungen und Mathematische Physik,
Prof. Dr. Wolf von Wahl, Prof. Dr. Gerhard Rein, PD Dr. Ralf Kaiser,
www.math.uni-bayreuth.de/org/mathe6/organization.html

Einige Dozenten zeigen Ihnen Gegenstände, die ihnen persönlich wichtig sind oder mit ihrer mathematischen Arbeit zusammenhängen. Wenn Sie genauer wissen möchten, was es damit auf sich hat, so können Sie gerne bei den betreffenden nachfragen!

Bayreuth

Mathematiker in Industrie und Wirtschaft erhalten im Durchschnitt mit die höchsten Einstiegsgehälter aller Hochschulschulabsolventen.
Im Folgenden stellen wir Ihnen die einzelnen Fachgebiete des Mathematischen Instituts der Universität Bayreuth kurz vor. Weitere Informationen können Sie unter den angegebenen Links im WWW erhalten.

Die **Analysis** erscheint als Differential- und Integralrechnung in Grundzügen bereits in der Schule. Während dieses Gebiet dort durch Probleme wie Extremwertbestimmungen oder Flächenberechnungen motiviert wird, kamen die wesentlichen Impulse zu seiner Entwicklung aus der Formulierung und Untersuchung der Grundlagen der Physik im 17. Jahrhundert durch Isaac Newton. Newtons vielleicht größte Leistung war die Erkenntnis, dass sich die Gesetze der Mechanik (und der Physik allgemein) in Form sogenannter Differentialgleichungen ausdrücken lassen, und dass durch die mathematische Analyse dieser Gleichungen das Verhalten des betreffenden physikalischen Systems, z. B. die Bewegung der Planeten um die Sonne, vorhergesagt werden kann. Die Frage nach der Existenz und den Eigenschaften der Lösungen solcher Differentialgleichungen ist auch bei der weiteren Entwicklung der Analysis eine wesentliche Triebfeder. An der Universität Bayreuth stehen dabei Gleichungen im Vordergrund, die die Strömungen von Flüssigkeiten, die zeitliche Entwicklung von Galaxien oder die Entstehung von schwarzen Löchern beschreiben. Differentialgleichungen und viele andere Konzepte der Analysis treten bei der Untersuchung von dynamischen Vorgängen weit über die Physik hinaus auf, Beispiele sind die Bewegung von Bakterien, chemische Reaktionsabläufe, das Wachstum von Tumorzellen, Flugeigenschaften moderner Düsenflugzeuge, die Bewegungen von Robotern oder auch die Bewertung finanzmathematischer Optionen mittels der Black-Scholes-Gleichung.

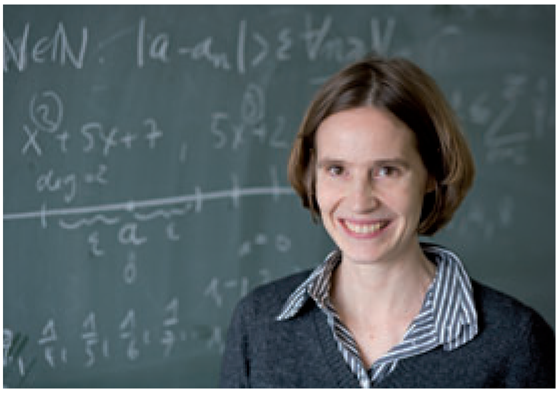
Geometrie

Lehrstuhl für Mathematik I – Komplexe Analysis,
Prof. Dr. Thomas Peternell, PD Dr. Priska Jahnke, PD Dr. Ivo Radloff,
http://btm8x5.mat.uni-bayreuth.de/mathe1/

Lehrstuhl für Mathematik VIII – Algebraische Geometrie,
Prof. Dr. Fabrizio Catanese, Prof. Dr. Ingrid Bauer, Prof. Dr. Jörg Winkelmann, PD Dr. Michael Lönne,
http://btm8x5.mat.uni-bayreuth.de/

Die Komplexe **Geometrie** hat ihre Ursprünge einerseits im Versuch, kubische Gleichungen und Gleichungen höherer Ordnung zu lösen, andererseits in dem auf Euler und Gauß zurückgehenden Studium von Funktionen einer komplexen Variablen. Die Notwendigkeit, in den komplexen Zahlen zu rechnen, ergibt sich aus dem fundamentalen

Prof. Dr. Thomas Peternell, Lehrstuhl für Mathematik I



PD Dr. Priska Jahnke, Lehrstuhl für Mathematik I

PD Dr. Ivo Radloff, Lehrstuhl für Mathematik I

Prof. Dr. Fabrizio Catanese, Lehrstuhl für Mathematik VIII

Mathematik an der Universität Bayreuth

Algebra und Zahlentheorie

Lehrstuhl für Mathematik II – Computeralgebra,
wird derzeit durch den bisherigen Lehrstuhlinhaber Prof. Dr. Adalbert Kerber kommissarisch geführt und in Kürze neu besetzt

Lehrstuhl für Mathematik IV – Zahlentheorie,
wird in Kürze neu besetzt

Professur für Angewandte Informatik – Darstellung Diskreter Strukturen,
Prof. Dr. Reinhard Laue,
www.mathe2.uni-bayreuth.de/people/laue.html

Satz, dass Polynome immer komplexe, jedoch im allgemeinen keine reellen Nullstellen haben. In der modernen Mathematik interessiert man sich nun nicht nur für einzelne Polynome, sondern für simultane Lösungen ganzer Scharen algebraischer Gleichungen. Man spricht von der Lösungsmenge als einer Varietät. Solche Varietäten bestehen i.A. nun nicht nur aus einzelnen Punkten, die man einfach so hinschreiben kann, sondern sie müssen mit Methoden verschiedener mathematischer Disziplinen untersucht werden.


PD Dr. Michael Lönne, Lehrstuhl für Mathematik VIII


Prof. Dr. Adalbert Kerber, Lehrstuhl für Mathematik II

Hier kommen etwa die Differentialgeometrie ("wie krümmt sich die Varietät im Raum?"), die Algebra und die Topologie zum Tragen. Wichtige Beispiele von Varietäten sind die elliptischen Kurven, die in der Kodierungstheorie, etwa bei Kreditkarten, unentbehrlich sind. Andere Anwendungen gibt es z.B. in der Robotik. Bei konkreten Rechnungen ist heutzutage die Computeralgebra nicht mehr wegzudenken. Komplexe Geometrie spielt auch in der theoretischen Physik, etwa der Stringtheorie, ein wichtige Rolle. Hier gibt es neben den vier üblichen noch weitere sechs reelle, das heißt drei komplexe, Dimensionen. Diese bilden eine sog. Mannigfaltigkeit, ein abstraktes Gebilde, das nicht von vornherein durch Gleichungen gegeben ist. Die globale Struktur solcher Mannigfaltigeiten zu verstehen sowie eine Klassifikation, ist ein zentrales Anliegen der Komplexen Geometrie. Insbesondere algebraische Flächen und dreidimensionale Varietäten werden in Bayreuth intensiv studiert.

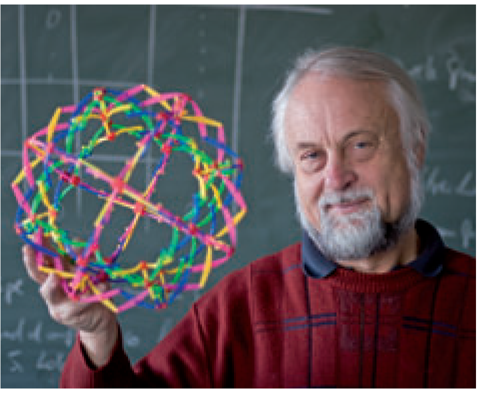
„I have never done anything 'useful'. No discovery of mine has made, or is likely to make, directly or indirectly, for good or ill, the least difference to the amenity of the world." sagte der berühmte Zahlentheoretiker Hardy zu Beginn des letzten Jahrhunderts. Heute werden **Zahlentheorie** – und allgemeiner die **Algebra** – alltäglich beim Electronic Banking, bei Handys, CD's, DVD's und generell bei sicherer Nachrichtenübertragung verwendet. Es hat sich gezeigt, dass das Verständnis algebraischer Strukturen eine Schlüsselrolle in der modernen Kommunikationstechnik spielt.
Die **Algebra** ist heutzutage ein sehr weitläufiges Forschungsgebiet, das


Prof. Dr. Ingrid Bauer, LS Mathematik VIII


Prof. Dr. Jörg Winkelmann, LS Mathematik VIII

auch benachbarte Gebiete wie die Geometrie durchdringt. Ein Teilgebiet, das hier in Bayreuth in Kooperation von Algebra und Informatik erfolgreich vorangetrieben werden konnte, ist die generelle konstruktive Theorie diskreter Strukturen. Methoden der Algebra und der Algebraischen Kombinatorik führen dort zum Ziel, weil in Zusammenarbeit mit der Informatik effiziente Methoden, Datenstrukturen und Algorithmen entwickelt werden konnten. Konstruiert wurden insbesondere Versuchspläne (designs), fehlerkorrigierende Codes und molekulare Graphen für die automatische Aufklärung chemischer Strukturen. Die **Zahlentheorie** beschäftigt sich, vereinfacht formuliert, mit der Struktur der natürlichen Zahlen – insbesondere der Verteilung der Primzahlen darin – sowie mit Gleichungen in diesen, den sogenannten diophantischen Gleichungen. Die spektakuläre Entwicklung der Zahlentheorie gerade in den letzten Jahrzehnten zeigt sich z.B. bei der bereits erwähnten Lösung des 350 Jahre alten Problems von Fermat, welches für Generationen von Mathematikern richtungsweisende Impulse lieferte, und in der rasanten Entwicklung der Kryptographie.

Methoden der **Stochastik**, insbesondere **Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik**, kommen immer dann zum Einsatz, wenn Prozesse untersucht werden, die zumindest teilweise vom Zufall überlagert werden. Ohne derartige Methoden würde unser Banken- und Versicherungswesen mit den vielen innovativen Anlagemöglichkeiten und unterschiedlichen Tarifmodellen nicht funktionieren. Selbst moderne Suchmaschinen wie Google verwenden Methoden aus dem Bereich der statistischen maschinellen Lernverfahren. Aber natürlich kommen vom Zufall überlagerte Prozesse – zum Beispiel als Folge von Messungenauigkeiten oder als Summe von vielen kleinen Fehlertermen – auch in den Naturwissenschaften und der



Prof. Dr. Reinhard Laue, Professur f. Angew. Informatik

Prof. Dr. Andreas Christmann, LS f. Mathematik VII

Medizin vor. So ist heutzutage eine gesetzliche Zulassung eines neuen Medikamentes in der EU ohne eine vorherige Durchführung von statistischen Prüfverfahren nicht mehr möglich. Mathematische Modellbildung und Verfahren der Angewandten Statistik gehören heute zum Standardwerkzeug aller empirischen Wissenschaften.

Stochastik u. Statistik

Lehrstuhl für Mathematik VII – Stochastik
Prof. Dr. Andreas Christmann, Prof. Dr. Helmut Rieder, Prof. Dr. Walter Olbricht,
www.math.uni-bayreuth.de/org/mathe7/

Schließlich ermöglicht das Fachgebiet **Numerische Mathematik** die Computerberechnung von Lösungen komplizierter Gleichungen, die in fast allen Wissenschafts- und Technikgebieten auftreten. Zum Beispiel können Gasströmungen, chemische Reaktionen und elektrische Felder von Brennstoffzellen durch äußerst komplizierte Gleichungssysteme beschrieben werden, deren Lösung heute immer noch nicht mit hinreichend großer Genauigkeit gelingt. Bei der Beschreibung verfahrenstechnischer Prozesse oder der Simulation elektrischer Schaltkreise ist es die ungeheuer große Zahl von Gleichungen, die neue mathematische Methoden einfordert, damit sie mit dem Computer gelöst werden können. In der **Kontinuierlichen Optimierung und Kontrolltheorie** werden dann Algorithmen zur optimalen Steuerung oder Regelung von Brennstoffzellen, Robotern und anderen komplexen Systemen aus den Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften entwickelt und analysiert. Während die Kontinuierliche Optimierung vor allem auf Methoden aus der Analysis und der Numerischen Mathematik beruht, liegen die theoretischen Grundlagen der Diskreten Optimierung vorwiegend in der Graphentheorie, der Algebra und

Prof. Dr. Helmut Rieder, Lehrstuhl für Mathematik VII

Prof. Dr. Walter Olbricht, Lehrstuhl für Mathematik VII

Prof. Dr. Frank Lempio, Lehrstuhl für Mathematik V

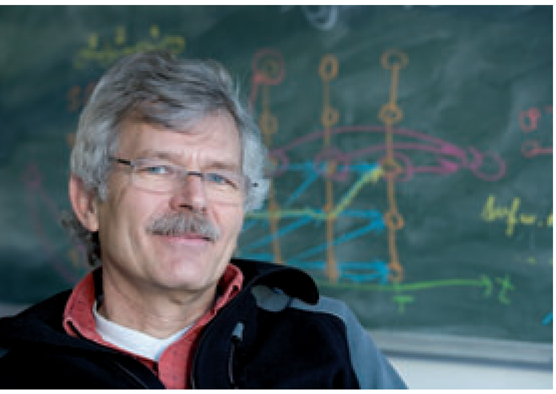
Prof. Dr. Lars Grüne, Lehrstuhl für Mathematik V

Mathematik an der Universität Bayreuth

Prof. Dr. Hans Josef Pesch, LS für Ingenieurmathematik

Prof. Dr. Kurt Chudej, Lehrstuhl für Ingenieurmathematik

Prof. Dr. Jörg Rambau, Lehrstuhl für Wirtschaftsmathematik



Prof. Dr. Klaus Schittkowski, Professur f. Angew. Informatik

der Zahlentheorie. Die Grenze zur Informatik, insbesondere der Algorithmentheorie, ist fließend. **Diskrete Optimierung** wird an der Universität Bayreuth angewendet im Bereich der Verkehrsplanung und der Logistik, z.B. beim Einsatz von Pannenfahrzeugen des ADACs oder des Winterdienstes, oder der Distribution von Waren innnerhalb eines großen Netzes von Verkaufsfilialen.

Die Mathematik an der Universität Bayreuth ist auch im bundesweiten Vergleich mit anderen Hochschulen sehr "drittmittelstark", das heißt externe Geldgeber fördern Bayreuther Forschungsprojekte. Dies zeigt sich in Internationalen Doktorandenkollegs, in von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Forschergruppen und Forschungsschwerpunkten und in vielen einzelnen Forschungsprojekten – auch unter Beteiligung von Industrie und Wirtschaft. Alle Bayreuther Mathematiker pflegen dabei intensiv internationale Kontakte mit Fachkollegen weltweit.

Numerische Mathematik, Optimierung und Kontrolltheorie

Lehrstuhl für Mathematik V – Numerische Mathematik, Optimierung und Kontrolltheorie,
Prof. Dr. Frank Lempio, Prof. Dr. Lars Grüne,
http://num.math.uni-bayreuth.de/

Lehrstuhl für Ingenieurmathematik – Optimale Steuerung und Wissenschaftliches Rechnen,
Prof. Dr. Hans Josef Pesch, Prof. Dr. Kurt Chudej,
www.uni-bayreuth.de/departments/ingenieurmathematik/

Lehrstuhl für Wirtschaftsmathematik – Diskrete Optimierung,
Prof. Dr. Jörg Rambau,
www.wm.uni-bayreuth.de/

Professur für Angewandte Informatik – Kontinuierliche Optimierung,
Prof. Dr. Klaus Schittkowski,
www.math.uni-bayreuth.de/~kschittkowski/

Das Fach Mathematik gehört in der Schule zu den Kernfächern und gilt als nicht leicht. Aus diesem Grund besitzt die Ausbildung angehender Mathematiklehrer an der Universität Bayreuth einen sehr hohen Stellenwert. Die Verbindung zwischen Fachwissenschaft und Schulpraxis stellt dabei die **Fachdidaktik** Mathematik her. Schwerpunkte dieses Fachgebiets in Bayreuth sind neue Konzepte für das Lehren und Lernen und deren Umsetzung im Unterricht sowie Elementarmathematik unter problemgeschichtlichen Gesichtspunkten. Besondere Bedeutung kommt der Entwicklung, Erprobung und Evaluation von Mathematisoftware zu. GEONExT und dynamische Arbeitsblätter sind zu einem Markenzeichen geworden.

Didaktik der Mathematik

Lehrstuhl für Mathematik IX – Mathematik und ihre Didaktik,
Prof. Dr. Peter Baptist,
PD Dr. Alfred Wassermann,
Akad. Direktor Dr. Wolfgang Neidhardt,
http://did.mat.uni-bayreuth.de

Zentrum zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts,
http://zmnu.de/

Prof. Dr. Peter Baptist, Didaktik der Mathematik

Interessentinnen und Interessenten für ein Studium der Mathematik finden an der Universität Bayreuth ein reiches Angebot an mathematischen Studiengängen, z.B. Mathematik mit den Anwendungsfächern Physik, Informatik, Wirtschaftswissenschaften, Ingenieurwissenschaften, Biologie oder Philosophy and Economics, die integrierten Studiengänge Wirtschaftsmathematik und Technomathematik, in denen Mathematik und Informatik mit den Anwendungsgebieten Wirtschaftswissenschaften oder Ingenieurwissenschaften verknüpft sind und nicht zuletzt die Ausbildung zur Mathematiklehrerin oder zum Mathematiklehrer an Gymnasien, Realschulen oder beruflichen Schulen. Informationen über unser Studienangebot finden Sie auf den folgenden Seiten in diesem Heft. ■


PD Dr. Alfred Wassermann, Didaktik der Mathematik

Beispiele für Drittmittelprojekte mit Beteiligung Bayreuther Mathematiker

Forschergruppe der Deutschen Forschungsgemeinschaft „Classification of Algebraic Surfaces and Compact Complex Manifolds“,
www.uni-bayreuth.de/forschungseinrichtungen/dfg-forschergr/790/index.html

Internationales Doktorandenkolleg im Elitenetzwerk Bayern „Identifikation, Optimierung und Steuerung für technische Anwendungen“,
www2.am.uni-erlangen.de/elitenetzwerk-optimierung

Schwerpunktprogramm 1305 der Deutschen Forschungsgemeinschaft „Regelungstheorie digital vernetzter dynamischer Systeme“,
http://spp-1305.atp.ruhr-uni-bochum.de/

EU Specific Targeted Research Program PLATO-n, „A PLAtform for Topology Optimisation incorporating Novel, Large-Scale, Free Material Optimisation and Mixed Integer Programming Methods”,
www.plato-n.org/

Modellversuch „Steigerung der Effizienz des Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Unterrichts“,
http://sinus-transfer.de

Diverse Industrieprojekte,
z.B. „Development of a Toolbox for Mixed-Integer Nonlinear Programming“ mit der Shell AG,
www.math.uni-bayreuth.de/~kschittkowski/projects.htm
oder „Assistentensystem für integrierte Größen- und Preisoptimierung“, mit NKD und Förderung der Bayerischen Forschungsstiftung
www.wm.uni-bayreuth.de/index.php?id=nkd_assistentensys

Kontakt

Mathematisches Institut
Universität Bayreuth
Universitätsstr. 30
95440 Bayreuth

Sekretariat:
Frau Claudia Lachmann
Telefon 0921/55-3277

Internet:
www.math.uni-bayreuth.de

Die BA/MA-Studiengänge

Bachelor of Science/Master of Science in Mathematik, Wirtschaftsmathematik, Technomathematik

Wie die Beiträge in diesem Heft zeigen, ist die Mathematik eine spannende und vielfältige Wissenschaft mit den unterschiedlichsten Anwendungen in Natur-, Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften. Diese Vielfalt der Mathematik ist Ausgangspunkt der Konzeption der Bachelor- und Master of Science-Studiengänge Mathematik, Wirtschaftsmathematik und Technomathematik. Hier beantworten wir Ihnen die wichtigsten Fragen zu unserem Studienangebot, dem Aufbau der Studiengänge und den beruflichen Perspektiven.

Der Aufbau der Module der Bachelor/Master-Studiengänge der Mathematik in Bayreuth ist in unten stehender Übersicht dargestellt.

„Dieses ganze Dasein, das um uns läuft, rennt, steht, ist nicht nur für seine Einsehbarkeit von der Mathematik abhängig, sondern ist effektiv durch sie entstanden, ruht in seiner so und so bestimmten Existenz auf ihr.“
(Robert Musil, Der Mathematische Mensch, 1913)

Was bedeuten diese „Module“? Die einjährigen ***Basismodule*** vermitteln in Vorlesungen mit begleitenden Übungen in Kleingruppen das mathematische Grundwissen und die für das weitere Studium benötigten Grundfertigkeiten. Die ***Aufbaumodule*** geben Ihnen ebenfalls in Vorlesungen mit Kleingruppenübungen einen Überblick über die wichtigsten Gebiete der Mathematik – damit erhalten Sie früh einen Einblick in die Vielfalt der Mathematik. Die ***Vertiefungsmodule*** verzahnen Bachelor- und Master-Studium. In Vorlesungen, Übungen und Seminaren lernen Sie die von Ihnen ausgewählten Gebiete genauer kennen. Die ersten Vertiefungsmodule im dritten Jahr des Bachelor-Studiums führen zur dreimonatigen Bachelor-Arbeit, in der Sie zum ersten Mal selbstständig ein mathematisches Thema bearbeiten. In den Spezialisierungsmodulen erwerben Sie Kenntnisse und Fähigkeiten, die Sie bis an den Stand der Forschung heranführen. In der zehnmonatigen Master-Arbeit wenden Sie diese auf ein aktuelles mathematisches Problem an. Abgerundet wird das Programm durch integrierte ***Programmier- und Computerkurse*** sowie ***Praktika*** – wahlweise in Industrie und Wirtschaft oder als Projektarbeiten an der Universität.

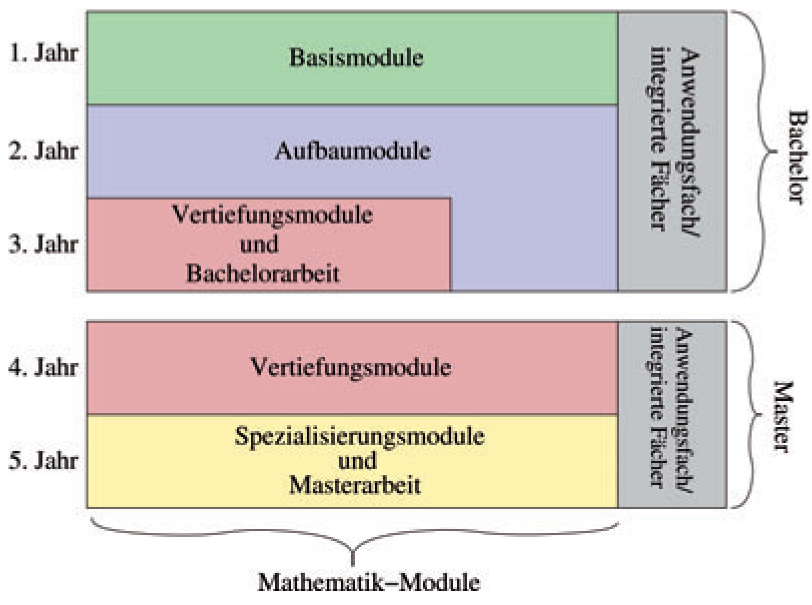
Und was für Inhalte stecken darin? Die Basismodule sind in allen Studiengängen identisch und behandeln die Analysis und die Lineare Algebra. Wie es danach weiter geht, hängt von Ihrem konkreten Studiengang ab:

Studiengang Mathematik

Der Bachelor/Master-Studiengang Mathematik ist ein zweistufiger Mathematik-Studiengang mit einem Anwendungsfach Ihrer Wahl.
Die ***Aufbaumodule*** decken die Mathematik in der Breite ab. Der umfassende Überblick über die Gebiete und Methoden der Mathematik, den Sie hierbei erhalten, liefert Ihnen das Handwerkszeug für Ihr weiteres Studium. In den ***Vertiefungsmodulen*** haben Sie freie Auswahl aus vielen interessanten Gebieten der Mathematik. Von der Untersuchung algebraischer Strukturen über die Geometrie und die mathematische Analysis komplexer Phänomene bis hin zur Statistik, Optimierung und der Umsetzung numerischer Algorithmen am Computer zur Lösung echter Praxisprobleme können Sie nach Ihren Interessen auswählen, was Sie vertieft studieren möchten. Das ***Anwendungsfach*** im Umfang von etwa 20% der Studienleistung wird ab dem ersten Semester begleitend studiert. Neben den „Klassikern“ Physik und Informatik gibt es in Bayreuth viele weitere Möglichkeiten (momentan: Biologie, Geoökologie, Philosophy and Economics, Ingenieur- oder Wirtschaftswissenschaften).

Studiengang Wirtschaftsmathematik

Der Bachelor/Master-Studiengang Wirtschaftsmathematik ist ein Mathematik-Studiengang mit integrierter Ausbildung in Wirtschaftswissenschaften und Informatik.
Die ***Aufbaumodule*** sind fokussiert auf mathematische Gebiete, die besonders relevant sind für die Anwendungen in der Betriebs- und Volkswirtschaft, wie z. B. Stochastik, Statistik, Optimierung und Numerische Mathematik. Bei den ***Vertiefungsmodulen*** haben Sie die freie Wahl: möglich sind anwendungsorientierte Veranstaltungen wie z. B. Diskrete Optimierung oder Statistik, aber auch grundlagenorientierte Schwerpunkte aus der Algebra, Analysis oder Geometrie, deren tiefere Kenntnis zum Verständnis komplexer mathematischer Zusammenhänge z. B. in Logistik oder Finanzmathematik unabdingbar ist. Die Gebiete in den ***Wirtschaftswissenschaften***,



des Mathematischen Instituts an der Universität Bayreuth

die etwa 20% der Studienleistung ausmachen, reichen von den Grundlagen der Volks- und Betriebswirtschaft bis hin zu Themen wie Supply Chain Management, Finanz- oder Investitionsmanagement. In der ***Informatik***, die ebenfalls einen Anteil von ca. 20% am Studium ausmacht, studieren Sie die Grundlagen, Algorithmen und Datenstrukturen sowie Datenbanken und vertiefen dann – bei Interesse bereits im Bachelor – eines oder mehrere dieser Gebiete.

Studiengang Technomathematik

Der Bachelor/Master-Studiengang Technomathematik ist ein Mathematik-Studiengang mit integrierter Ausbildung in Ingenieurwissenschaften und Informatik.

Die ***Aufbaumodule*** sind fokussiert auf mathematische Methoden für anspruchsvolle technische Anwendungen wie z.B. Numerische Mathematik, Differentialgleichungen und Optimierung. Bei den ***Vertiefungsmodulen*** haben Sie wieder die Wahl: möglich sind Schwerpunkte mit direktem technischen Bezug wie z.B. Optimale Steuerung, mathematische Kontrolltheorie oder Numerik von Differentialgleichungen ebenso wie grundlagenorientierte Veranstaltungen, z.B. aus der Höheren Analysis.

In den ***Ingenieurwissenschaften***, die mit etwa 20% zum Studium beitragen, studieren Sie Technische Mechanik, Elektrotechnik, Regelungstechnik sowie Strömungsmechanik und vertiefen – bereits im Bachelor – eines oder mehrere dieser Gebiete.

In der ***Informatik*** (ca. 10% der Studienleistung) studieren Sie die Grundlagen sowie Algorithmen und Datenstrukturen; weitere Vertiefungsgebiete folgen nach eigener Wahl im Master.

Was mache ich, wenn ich jetzt noch nicht weiß, welchen dieser Mathematik-Studiengänge ich wählen soll?

Dann fangen Sie mit einem der Studiengänge an und legen sich erst später endgültig fest. Bis zum Ende des ersten Studienjahres ist ein Wechsel fast ohne zusätzlichen Aufwand möglich. Ebenso können Sie nach dem Bachelor-Abschluss in ein anderes Master-Programm wechseln.

Übrigens: auch das Studium für das Lehramt an Gymnasien in Mathematik mit Physik oder Informatik wird an der Universität Bayreuth mit den Abschlüssen „Bachelor of Education"/„Master of Education in Science" angeboten. Nach dem „Bachelor of Education" ist ein Wechsel in einen Master-of-Science-Studiengang möglich. Genauere Informationen unter www.zmnu.de

Kann ich auch eine Zeit im Ausland verbringen?

Selbstverständlich, z.B. im Rahmen des EU-Austauschprogramms ERASMUS an Partneruniversitäten in England, Frankreich oder Italien. Und durch das Europäische Credit-Punkte-System ECTS zählen Ihre dortigen Studienleistungen direkt für Ihren Bayreuther Bachelor- oder Master-Abschluss.

Und wozu studiere ich überhaupt Mathematik?

In jedem unserer Mathematik-Studiengänge lernen Sie neben den fachlichen Kenntnissen und Fertigkeiten viele weitere Qualifikationen: abstraktes Denken, Problemlösungskompetenz und Durchhaltevermögen sowie nicht zuletzt das Präsentieren komplexer Sachverhalte in Seminar- und Kolloquiumsvorträgen. Daher arbeiten Mathematik-, Wirtschafts- und Technomathematik-Absolventinnen und -Absolventen der Universität Bayreuth in vielen verschiedenen Branchen: in Banken und Versicherungen ebenso wie in der Software- und Hightech-Industrie oder in der Unternehmensberatung – in der Region, in ganz Deutschland und weltweit. Mathematik-Absolventinnen und -Absolventen haben hervorragende und weitgehend konjunkturunabhängige Berufsaussichten. Außerdem ist das Mathematische Institut der Universität Bayreuth an Internationalen Doktorandenkollegs, DFG-Forschergruppen, DFG-Forschungsschwerpunkten und vielen weiteren Forschungsprojekten beteiligt, in denen es für die besten unserer Absolventinnen und Absolventen vielfältige Möglichkeiten gibt, hier in Bayreuth in der mathematischen Forschung tätig zu werden und einen Doktortitel anzustreben. ■

Wo kann ich weitere Informationen bekommen?

- im Internet unter *www.math.uni-bayreuth.de/BaMa*
- in der persönlichen Studienberatung, siehe *www.math.uni-bayreuth.de/lehre/beratung.html*
- am Tag der Mathematik, der jährlich an der Universität Bayreuth stattfindet; siehe *www.tdm.uni-bayreuth.de*

Das Wichtigste in Kürze

- klare Organisation des Studiums
- international anerkannte und vergleichbare Abschlüsse Bachelor of Science und Master of Science
- ausgeglichene Arbeitsbelastung durch studienbegleitende Prüfungen
- breiter Einblick in die vielfältigen Teilgebiete der Mathematik bereits im 2. Jahr
- Wahl- und Vertiefungsmöglichkeiten bereits im Bachelor-Studium
- Bachelor als erster berufsqualifizierender Abschluss nach drei Jahren
- weitere Vertiefung und Spezialisierung im Master-Studium bis zum Stand der aktuellen Forschung
- konjunkturunabhängig ausgezeichnete Berufschancen in vielen interessanten Branchen
- Teilzeitstudium möglich

Gerhard Wolf

Das Jahr der eine Bayreuther

Professor Dr. Gerhard Wolf, Inhaber des Lehrstuhls für Ältere Deutsche Philologie

Nach sieben Wissenschaftsjahren, deren Themenschwerpunkte in den Natur- und Technikwissenschaften lagen, rief das Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) 2007 zum Jahr der Geisteswissenschaften aus. Ziel des Jahres der Geisteswissenschaften war es, der Öffentlichkeit die Vielfalt und Leistungen der geisteswissenschaftlichen Fächerkulturen vor Augen zu führen. Denn gleichgültig ob Stadtsanierung, archäologischer Wanderweg, Fernsehen, Lehrerausbildung, Museum, Pädagogik, Religionswissenschaft, Theater etc. – keines dieser Wissensfelder ist zu Beginn des 21. Jahrhunderts ohne eine (geistes)wissenschaftliche Fundierung denkbar.

Die 96 Fächer, die man den Geisteswissenschaften zurechnet, wirken auf unterschiedliche und vielfältige Weise in die öffentlichen Diskurse hinein. Die aktuellen Debatten über die sozialen Folgen des Klimawandels, die Höhe von Managergehältern oder die Integration ausländischer Mitbürger – um nur einige zu nennen – kurzum: Die Zukunftsfragen unserer Gesellschaft werden aus den Diskursen der Geisteswissenschaften gespeist und wirken auf diese zurück. Als ‚Legitimationswissenschaften' wirken die geisteswissenschaftlichen Fächer maßgeblich mit an der Identitätsstiftung unserer Kultur, als „Beobachtungswissenschaften" analysieren und bewerten sie die sich in der Gesellschaft vollziehenden Prozesse.

Die Attraktivität der Fächer bei den Studierenden ist ungebrochen, so ist die bundesweite Zahl der Erstsemester in den Geisteswissenschaften in den letzten 10 Jahren um 25% gestiegen. Mittlerweile ist jeder 4. Studierende an einer deutschen Universität in einem geisteswissenschaftlichen Fach eingeschrieben.

Längst auch ist die Kompetenz der Absolventen nicht nur in der öffentlichen Verwaltung oder in den Schulen gefragt: Lässt man das Lehramt außer Betracht, so finden zwei Drittel der Absolventen geisteswissenschaftlicher Studiengänge ihre erste Stelle im Bereich der Wirtschaft. Der Grund für die besser gewordenen Berufsaussichten ist vor allem darin zu sehen, dass Flexibilität und Kreativität bzw. ganzheitliches Denken dieser Absolventengruppe in einer komplexer werdenden Umwelt immer mehr Beachtung finden.

Bundesweit fanden im Jahr der Geisteswissenschaften fast 1100 akkreditierte Veranstaltungen statt, die die Öffentlichkeit auf Inhalte und Leistungen der Geisteswissenschaften aufmerksam machen. Dazu gehörte etwa das Festival „Die Macht in Sprache" in Berlin oder die Veranstaltungsreihe „Mythos Rhein-Kulturraum, Grenzregion, Erinnerungsort", der Wissenschaftssommer in Essen oder der bundesweite Wettbewerb für Hochschulen „Geist begeistert", zu dem über 170 Projekte eingereicht wurden.

Am spektakulärsten waren die Buchstabenillustrationen in Berlin, mit denen die Veranstalter des Jahres der Geisteswissenschaften auf dessen Motto: „Die Geisteswissenschaften: das ABC der Menschheit" aufmerksam machten: Einzelne Buchstaben des ABC wurden auf prominente Fassaden öffentlicher Gebäude projiziert bzw. mit weißer Folie aufgeklebt. So schmückte ein 26m hohes D („wie Demokratie") ein Gebäude des Deutschen Bundestages und ein großes V („für Vorausdenker") das Portal der Humboldt-Universität.

Copyright: Redaktionsbüro Jahr der Geisteswissenschaften.

Geisteswissenschaften – Bilanz

Reges Interesse herrschte im Gebäude am Geschwister-Scholl-Platz an den vielfältigen Angeboten der zweiten Bayreuther Mediennacht, deren dritte Ausgabe jetzt im Februar erneut ein Publikumserfolg wurde

Auch in Bayreuth engagierten sich Kolleginnen und Kollegen im Rahmen des Jahres der Geisteswissenschaften und führten ihre Fachgebiete, Fragestellungen und Kompetenzen einer breiteren Öffentlichkeit vor. Insgesamt fanden 14 Veranstaltungen statt.

Eröffnet wurde das Bayreuther Jahr der Geisteswissenschaften mit einer von den Professoren Thomas Bargatzky (Ethnologie) und Gerhard Wolf (Ältere Deutsche Philologie) gemeinsam organisierten Veranstaltung, die in das Thema des Wissenschaftsjahres einführte. Den Eröffnungsvortrag hielt der Kieler Soziologe und Direktor des Instituts für Sozialwissenschaften Prof. Johannes Varwick zum Thema „Deutsche Sicherheitspolitik im Spannungsfeld zwischen Werten und Interessen", in dem er ein zentrales Thema des Jahres der Geisteswissenschaften, die Konkurrenz zwischen ethischen und politischen Prämissen, zum Gegenstand machte.

Im Februar wurde vom Lehrstuhl Amerikanistik (Prof. Klaus Benesch) und Frau Juniorprofessorin Martina Leeker eine internationale Konferenz zu dem bedeutenden Medientheoretiker McLuhan ausgerichtet. Ziel der Konferenz war es, im internationalen Rahmen McLuhan zu Beginn des 21. Jahrhunderts neu zu lesen und durch den Austausch unter den Medien- und Kulturwissenschaften eine Orientierungsleistung zu digital gestützter Kultur zu ermöglichen.

Der interessierten Öffentlichkeit wurde dazu ein umfangreiches Begleitprogramm geboten, u. a. eine interaktive Ausstellung zum Werk McLuhans, Präsentationen von Medienkünstlern, Screening von machinima-Filmen und Kommentierung, Vorstellung von GPS-Kunst, Max/MSP/Jitter und Bio-Kunst, daneben eine Installation von Peter Bexte und Studierenden des Studiengangs „Europäische Medienkultur" der Fachhochschule und der Universität Potsdam. Ein Konzert mit elektro-akustischer Musik rundete das Ereignis ab.

Die Medienwissenschaft unter Leitung von Prof. Jürgen Müller beteiligte sich mit zwei sehr öffentlichkeitswirksamen Veranstaltungen am Jahr der Geisteswissenschaften. Die zweite Bayreuther Mediennacht am 1. Februar bot einem breiten Publikum Gelegenheit Kenntnis zu nehmen von den zahlreichen audiovisuellen Produktionen (Kurz- und Dokumentarfilme, Hörspiele), die im Rahmen von Lehrveranstaltungen und freien studentischen Projekten im „Medienlabor" des Faches entstanden waren. Die ausgewählten Sendungen von Campus TV verdeutlichten, dass sich dieses Medienprojekt der Universität Bayreuth (welches regelmäßig auf dem regionalen Fernsehsender TV Oberfranken ausgestrahlt wird) inzwischen als wichtige Informationsplattform für die Hochschulregion Oberfranken etabliert hat.

Am 27. und 28. November fanden im „Bayreuther Zentrum" zwei spektakuläre Aufführungen der Multi-Media-Produktion „Motion Meets Media" statt, die ein multimediales Kaleidoskop mit überra-

Das Jahr der Geisteswissenschaften – eine Bayreuther Bilanz

Plakat zur Aufführung der Multi-Media-Produktion „Motion meets media“ im Bayreuther Zentrum

schenden Ansichten des dynamischen Zusammenspiels zwischen menschlichen Körpern, Maschinen und Medien boten. Auf der Bühne wurden Bewegungen audiovisuell gebrochen, in Bildernetzwerke, visuelle Kontrapunkte und (historische) Inszenierungen zerlegt und so eine Re-Mediation unserer Körperlichkeit und Körpererfahrung erreicht.

Beide Produktionen erwiesen sich mit Blick auf die Originalität ihrer Ideen sowie deren professionelle Umsetzung als sehens- und hörenswert und wurden von den zahlreich erschienenen Bürgerinnen und Bürgern der Stadt Bayreuth mit großem Interesse und Beifall bedacht. Die Vorführungen lenkten das Publikum auch auf Verbindungsmöglichkeiten zwischen praxisrelevanten und wissenschaftlichen Schwerpunkten sowie auf die spezifischen didaktischen Zielsetzungen der Bayreuther Medienwissenschaft, welche in der Anleitung zur Entwicklung origineller und kreativer Lösungen und zu deren kritischer Reflexion liegen.

Prof. Anno Mungen (Musiktheaterwissenschaft) konzipierte und moderierte im Oktober in der Villa Wahnfried das Gesprächskonzert *Die Diva als Mann* als Hommage an die auf den europäischen Bühnen gefeierte Wilhelmine Schröder-Devrient. Die Opernsängerin hatte sich oft über ihre männlichen Kollegen geärgert, weil sie überzeugt war, die Rolle des Liebhabers besser spielen zu können – die Frau als der bessere Mann! Im *Tannhäuser* komponierte Wagner für sie die wohl weiblichste aller Partien, die Rolle der Diva, einer Göttin im eigentlichen Sinne: Venus. Die Sopranistin mit dem Hang für männliche Rollen war hier die Verführerin schlechthin.

In dieser Spannung von androgyner Männlichkeit und der Verkörperung des Objekts männlicher Begierde ist das Rollenrepertoire, für das Schröder-Devrient weltberühmt war, anzusiedeln. Gerade hierdurch avancierte sie zu einer besonders faszinierenden Künstlerin, die durch ihre Ausstrahlung und ihr großes kreatives Potential zu den ersten Sängerdarstellerinnen modernen Zuschnitts gehörte. Arien aus Opern von Spontini, Wagner, Beethoven, Bellini und Rossini – dargeboten von der Sopranistin Nicola Müller, die von Elnara Ismailova am Klavier begleitet wurde – riefen Schröder-Devrients sängerische Leistungen musikalisch in Erinnerung: Italienischer Bel canto traf hier auf einen französisch geprägten Deklamationsstil und ließ gerade in dieser Kombination neu aufhorchen.

Das zweite Gesprächskonzert „Töchter, Tanz und Teufel: Bühne und Ballsaal im Salon“ fand am 22. November im Schloss Thurnau statt und spürte der Rezeption von Ballettinszenierungen an der Pariser Opéra zwischen 1820 und 1870 in der gesellschaftlichen Musik- und Tanzpraxis nach. In diesem Zeitraum wurde durch Arrangements von Ballettmelodien für Ballsaal und musikalischen Salon der öffentliche Wirkungsradius des Theaters erheblich erweitert, wobei die Grenzen zwischen Theater und Gesellschaft verschwammen:

Im Theater dieser Zeit wurden Gesellschaftstänze – an dramaturgisch und dramatisch zentralen Dreh- und Angelpunkten – in obligatorischen Ballszenen inszeniert, während umgekehrt der Gesellschaftstanz im Ballsaal – durch seinen Rückgriff auf Bühnenwerke – theatralisiert wurde. Theater und Gesellschaft avancierten vor diesem Hintergrund zu einer künstlerisch-kulturellen Interessengemeinschaft, die nicht zuletzt soziale Realitäten verarbeitet: Im Zuge der Auflösung tradierter Gesellschaftshierarchien entwickelte sich in den Ballsälen eine geradezu diabolische „Dansomanie“, deren Konfliktpotential in den Balletten nachinszeniert wurde. Mit allen künstlerischen Raffinessen wurde davor gewarnt, dass gerade für heranwachsende Töchter eine allzu ausgeprägte Tanz-Leidenschaft zu einem ‚teuflischen‘ Kontrollverlust führen und in weiterer Konsequenz nicht nur Familien, sondern ein ganzes Gesellschaftssystem „im Galopp“ in den Abgrund stürzen kann. Konzipiert und moderiert wurde dieses Konzert von Dr. Stephanie Schroedter, am Klavier spielte der Ansbacher Konzertpianist Paul Sturm. Beide Konzerte wurden mit Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung unterstützt.

Am 2.-3. November 2007 fand im Konzerthaus Berlin ein Symposium unter dem Titel *Drama – Szene – Stimme: Glucks Reformopern und ihre Interpretationen* statt, das von Prof. Thomas Betzwieser (Musikwissenschaft) gemeinsam mit dem Konzerthaus konzipiert und veranstaltet wurde. Die Tagung suchte gezielt die Schnittstelle von Wissenschaft und Praxis auf, nicht zuletzt stand sie im Zusammenhang mit Aufführungen der drei Wiener Reformopern Glucks (*Orfeo ed Euridice*, *Alceste* und *Paride ed Elena*) im Konzerthaus.

Im Mittelpunkt des Symposiums standen die Problemfelder Werkgestalt, Aufführung und Interpretation, die für die sog. Reformopern Glucks in besonderer Weise wirksam werden. Die ungemein offene und lebendige Diskussion des abschließenden Roundtables erwies einmal mehr die enge Wechselbeziehung von Wissenschaft und musikalischer Praxis sowie den spezifischen Transfercharakter kunstwissenschaftlicher Disziplinen.

Prof. Ute Fendler (Romanische Literaturwissenschaft) präsentierte im November neueste afrikanische Filme im Cineplex der Stadt Bayreuth: Les saignantes von Jean-Pierre Békolo (Kamerun, 2006), „Making off…“ von Nouri Bouzid (Tunesien, 2007) und „Moolaadé“ von Ousmane Sembène (Senegal, 2005).

Prof. Martina Drescher und Juniorprofessorin Monika Sokol veranstalteten mit Kollegen der Universität Bamberg und Erlangen eine gemeinsame Ringvorlesung zum Thema „Pragmatik“, in der an den drei fränkischen Universitäten aus-

gewählte Ansätze und Fragestellungen der linguistischen Pragmatik vorgestellt wurden.
Analog zu dem bundesweiten wurde an der Universität Bayreuth ein universitätsinterner Wettbewerb unter dem Motto „Geist schafft Wissen“ ausgelobt. Alle Studierenden waren eingeladen, kreative Ideen zur Bedeutung und Leistung der Geisteswissenschaften für den Dialog zwischen Wissenschaft und Gesellschaft zu entwickeln und medial umzusetzen.
Die Jury erkannte den 1. Preis (700 €) einer Gemeinschaftsarbeit von Mirjam Horn (MA Literatur und Medien) und Heiko Rauh (Magister Soziologie) mit dem Titel: „Ein Sorgenkind mit hohen Ansprüchen – Ein Beitrag zum Jahr der Geisteswissenschaften“ zu. Das Feature basiert auf Interviews, in denen Geisteswissenschaftler ihre sehr unterschiedlichen Haltungen zu ihrer Wissenschaft zum Ausdruck bringen. Durch präzise gestellte Fragen, kluge Auswahl der Gesprächspartner wird die Ambivalenz der Geisteswissenschaften, die oft selber hin und her gerissen sind zwischen Widerstand gegen kulturelle Fehlentwicklungen und dem Versuch, durch konstruktive Mitarbeit dem Zeitgeist ihren Stempel aufzudrükken, transparent. Damit war die Aufgabe des Wettbewerbs, den Rezipienten die Reflexion über die Bedeutung, Stellung und Aufgaben der Geisteswissenschaften nahezubringen, vorbildlich gelöst.
Den 2. Preis (500 €) erhielt Sandra Kappey (BA Theater und Medien) für ihren Videoclip „The Making of Arts“, der sich mit dem Profil des Studiengangs „Theater und Medien“ aus der Sicht von Lehrenden und Studierenden befasst und zugleich eine Dokumentation eines Projekts im Bereich der audiovisualen Medien enthält. Durch den Wechsel zwischen theoretischer Reflexion und Dokumentation nimmt der Zuschauer Anteil am mühsamen, aber auch vergnüglich-kreativen Produktionsprozess eines Videoclips, der dann am Ende der Dokumentation als abgeschlossenes Projekt vorgeführt wird.
Die Preise stiftete der Dekan der Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät, Prof. Karl-Georg Loritz, sie wurden überreicht auf der feierlichen Abschlussveranstaltung des Bayreuther Jahres der Geisteswissenschaften am 13. Dezember. Den Festvortrag hielt der Quästor des Europäischen Parlaments Dr. Ingo Friedrich, MdEP zum Thema *„Globalisierung: Ende des europäischen Lebensmodells?“*. Friedrich setzte sich in seinem von vielen Beispielen aus seiner langjährigen politischen Laufbahn angereicherten Vortrag entschieden dafür ein, dass die Bürger der Europäischen Union die Globalisierung als Herausforderung begreifen, das europäische Lebensmodell an die veränderten Gegebenheiten anzupassen, es kontinuierlich weiter zu entwikkeln und dafür offensiv zu werben. Trotz des weltweiten Wettbewerbs, der zunehmend nicht nur um Märkte, sondern um Ideen und Weltbilder geführt wird, sah Friedrich die Attraktivität des auf christlichen Werten, Humanismus, Toleranz und Aufklärung beruhenden Lebensmodells als ungebrochen an und zeichnete ein optimistisches Zukunftsbild.
Zieht man ein Resümee des Jahres der Geisteswissenschaften, dann ist es sicher gelungen, die Bedeutung der Geisteswissenschaften für den Alltag deutlicher zu machen. Dies schlägt sich auch in der gestiegenen Nachfrage nach geisteswissenschaftlicher Expertise seitens politischer, gesellschaftlicher und wirtschaftlicher Entscheidungsträger nieder. Dank der Unterstützung durch die Medien ist die Sensibilität für den Beitrag der Geisteswissenschaften gewachsen.
Diese Entwicklung wird gefördert von einer zunehmenden Reflexion über die Ziele unserer Gesellschaft, angesichts der demographischen Entwicklung in Europa, der Globalisierung und den Folgen des Klimawandels bzw. der knapper werdenden Ressourcen. Nahezu alle geisteswissenschaftlichen Fächer nehmen teil an der Selbstaufklärung der Gesellschaft, insbesondere bei der Versicherung ihrer Vergangenheit und der Abgrenzung gegenüber anderen Kulturen oder Religionen. Umgekehrt ist aber auch im Jahr der Geisteswissenschaften ihren Fachvertretern deutlich geworden, dass eine solche Orientierungsleistung zunehmend von der Gesellschaft nachgefragt und eingefordert wird. Dieses war ein Grundtenor der öffentlichen Diskussionen, die im abgelaufenen Jahr stattgefunden haben. Den Geisteswissenschaften wird es nicht mehr ohne weiteres zugestanden, Aufklärung quasi *ad usum Delphini* zu betreiben, sondern sie sollen dazu beitragen, unsere und fremde Gesellschaften besser zu begreifen und aktiv an der Diskussion der Frage mitzuwirken, welche künftigen Formen des Zusammenlebens wir auf diesem Planeten wollen und welche nicht. ■

Preisverleihung von "Geist schafft Wissen" in Bayreuth: Es freuen sich (v.l.) die Preisträger Sandy Kappey, Miriam Horn und Heiko Rauh sowie Universitätspräsident Professor Helmut Ruppert, der damalige Dekan der Sprach- und Literaturwissenschaftlichen Fakultät, Professor Gerhard Wolf sowie der Dekan der Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät, Professor Karl-Georg Loritz, der übrigens die Preise gestiftet hatte. (Foto Peter Kolb)